풀이

STEP II 1992, 문제 13

역학 • 마찰과 연결된 입자

STEP II 1992, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

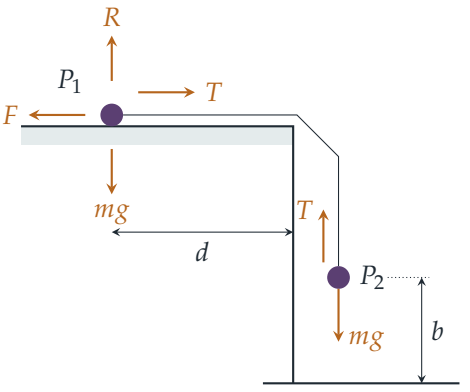
step.maths.org/questions/92-s2-q13

핵심 아이디어

운동은 두 단계로 이루어진다. P_2가 떨어지는 동안에는 줄이 팽팽하고, 두 입자는 하나의 공통 가속도(acceleration)로 함께 움직인다. P_2가 바닥에 닿으면 줄이 느슨해지고, P_1은 마찰(friction)을 받아 미끄러지다가 멈출 뿐이다. 모든 것은 충돌 순간의 속력에서 나온다. 첫 번째 부분에서는 정지 거리를 모서리까지 남은 거리와 비교하고, 두 번째 부분에서는 두 시간을 비교한다.

풀이

P_1과 P_2를 입자로, 줄을 가볍고(light) 늘어나지 않으며(inextensible) 매끄러운(smooth) 모서리 위를 지나는 것으로 모형화한다. 따라서 장력(tension) T는 줄 전체에서 같다. 탁자는 P_1에 대하여 거칠다(rough). $b < d$라고 가정하여 P_1이 모서리에 닿기 전에 P_2가 바닥에 닿도록 한다(줄의 길이는 이후 아무 역할도 하지 않는다).



첫 번째 부분

1단계: 줄이 팽팽한 경우. P_1에 대하여 연직 방향으로 힘을 분해하면 $R = mg$이다. P_1은 미끄러지고 있으므로 마찰은 한계 마찰(limiting friction)이다. 즉 $F = \mu R = \mu mg$이고, 운동을 방해하는 방향으로 작용한다. 공통 가속도를 a라 하면

$$\begin{aligned} P_2 \text{ (아래쪽)}: &\quad mg - T = ma, \\ P_1 \text{ (모서리 쪽)}: &\quad T - \mu mg = ma. \end{aligned}$$

두 식을 더하면 $2ma = mg(1-\mu)$이므로 $a = \frac{1}{2}g(1-\mu)$이고, $\mu < 1$이므로 이 값은 양수이다. 즉 계는 실제로 움직이기 시작한다. P_2는 정지 상태에서 거리 b만큼 떨어지므로, 바닥에 닿을 때의 속력 V는 다음을 만족한다.

$$V^2 = 2ab = gb(1-\mu).$$

이 순간 P_1도 같은 속력 V를 가지며, 거리 b만큼 움직였으므로 모서리로부터 $d-b$만큼 떨어져 있다.

2단계: 줄이 느슨한 경우. 충돌 후 P_2는 바닥에 있거나 위로 튀어 오르고, P_1은 계속 모서리 쪽으로 움직이므로 줄은 느슨해지고 $T = 0$이다.

> **생각해 보기** P_2가 튀어 오르는 동안 줄이 다시 팽팽해질 수 없는 이유는 무엇인가?

충돌 순간에 줄은 정확히 팽팽했다. 그 뒤 P_1은 모서리에 더 가까워지므로 모서리 너머로 줄이 더 풀려 나가고, P_2는 바닥보다 아래로 내려가지 않으므로 충돌 순간보다 더 많은 줄을 필요로 하지 않는다. 따라서 그 이후로 줄은 계속 느슨하다.

그러므로 P_1은 오직 μg의 크기로 감속하며, 모서리에 먼저 닿지 않는다면 다음 거리만큼 더 움직인 뒤 정지한다.

$$s = \frac{V^2}{2\mu g} = \frac{b(1-\mu)}{2\mu},$$

따라서 P_1이 떨어질 필요충분조건은 $s > d - b$이다.

$$\begin{aligned} \frac{b(1-\mu)}{2\mu} > d - b &\iff b - b\mu > 2\mu d - 2\mu b \qquad (\text{양변에 곱함: } 2\mu > 0) \\ &\iff b > \mu(2d - b) \\ &\iff \mu < \frac{b}{2d-b}, \end{aligned}$$

마지막 단계에서는 $2d - b$로 나누었는데, $d > b$이므로 이 값은 양수이다. 모든 단계는 거꾸로도 성립하므로, 이것이 요구된 "필요충분조건"이다. (μ가 $b/(2d-b)$와 같으면 P_1은 정확히 모서리에서 멈추고 떨어지지 않는다.)

두 번째 부분

이제 $\mu > b/(2d-b)$이므로 P_1은 탁자 위에서 멈춘다. P_2가 처음 바닥에 닿는 순간부터 시간을 잰다. 이 순간 두 입자의 속력은 모두 V이다.

P_1**:** 속력 V에서 μg의 크기로 감속하므로, 다음 시간 후에 멈춘다.

$$t_1 = \frac{V}{\mu g}.$$

P_2**:** 뉴턴(Newton)의 반발 법칙(law of restitution)에 의해 P_2는 속력 eV로 튀어 오른다. 줄이 느슨하므로 중력만 받으며 자유롭게 움직이고, $eVt - \frac{1}{2}gt^2 = 0$일 때, 즉 다음 시간 후에 바닥으로 돌아온다.

$$t_2 = \frac{2eV}{g}.$$

(충돌은 순간적이므로 첫 번째 튐에서 시간이 소모되지 않는다.)

P_1이 두 번째 튐 전에 정지하는 것은 정확히 $t_1 < t_2$일 때이다.

$$\frac{V}{\mu g} < \frac{2eV}{g} \iff \frac{1}{\mu} < 2e \iff e > \frac{1}{2\mu},$$

여기서 $V/g > 0$으로 나누었다. 따라서 $e > 1/(2\mu)$이면, 요구된 대로 P_2가 두 번째로 튀기 전에 P_1이 정지한다. 사실 그 역도 성립한다.

검산

- 극한의 경우: $\mu \to 0$이면 경계값 $b/(2d-b)$보다 당연히 작아지고, 매끄러운 탁자에서 P_1은 확실히 미끄러져 떨어진다. $b = d$이면 경계값은 1이 되므로 $\mu < 1$일 때 항상 떨어지는데, P_2가 바닥에 닿을 때 P_1은 이미 모서리에 있으면서 여전히 움직이고 있으므로 옳다.
- $\mu < 1$이므로 두 번째 조건이 성립하려면 $e > \frac{1}{2}$이어야 한다. 거의 튀지 않는 바닥에서는 짧게 튀어 오르므로, 예상대로 P_2가 먼저 다시 바닥에 닿는다.
- 수치적으로 $d = 2$, $b = 1$, $\mu = 0.5$, $e = 0.8$($g = 9.8$로 둠)일 때 운동을 단계별로 계산하면 $t_1 \approx 0.452\,\text{s}$, $t_2 \approx 0.361\,\text{s}$이고, 이는 $V^2 = 4.9$일 때의 $V/(\mu g)$와 $2eV/g$에 일치한다. 이때 $e = 0.8 < 1/(2\mu) = 1$이므로 P_2가 먼저 다시 튄다. 단계별 시뮬레이션으로 두 판정 기준을 무작위로 검사한 결과 모든 경우에 일치하였다.

흔한 실수

- 두 번째 단계에서도 장력을 남겨 두는 것: P_2가 바닥에 닿으면 줄은 느슨해지고 P_1은 마찰만으로 감속한다.

- P_1이 이미 거리 b만큼 움직였다는 것을 잊고, s를 $d - b$가 아닌 d와 비교하는 것.
- 힘 $mg(1-\mu)$가 두 질량 모두를 가속해야 한다는 것을 잊고, 계의 가속도를 $g(1-\mu)$로 쓰는 것.

STEP 너머

여기서 줄은 **일방향** 구속(unilateral constraint)이다. 당길 수는 있지만 밀 수는 없으므로, 줄이 느슨해지면 운동 방정식이 바뀐다. 충돌이 일어나거나 접촉이 끊길 때 지배 방정식이 바뀌는 계를 구분적으로 매끄러운 계(piecewise-smooth system) 또는 혼성계(hybrid system)라고 하며, 공학 동역학과 로봇공학에서 본격적으로 연구된다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 줄, 마찰, 충돌을 꼼꼼하게 다루므로 다음 단계로 읽기에 좋다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.