풀이

STEP II 1992, 문제 12

역학 • 힘의 모멘트와 탄성 끈

> **STEP II 1992, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q12

핵심 아이디어

각 바퀴는 자유롭게 회전할 수 있으므로, 바퀴가 평형(equilibrium)을 이루기 위한 유일한 조건은 바퀴 중심에 대한 모멘트(moment)가 균형을 이루는 것이다. 매달린 입자는 바퀴를 한쪽 방향으로 돌리려 하고, 탄성줄(elastic string)은 반대 방향으로 바퀴를 되돌리려 한다. 기하학적 관계로부터 탄성줄의 늘어난 길이(extension)를 θ로 나타낼 수 있으므로, 후크의 법칙(Hooke's law)으로 장력(tension)을 구하고, 모멘트를 계산하면 θ에 대한 방정식 하나를 얻는다. 따라서 평형 위치의 개수를 세는 것은 실제로 의미가 있는 각도 범위에서 이 방정식의 해의 개수를 세는 것과 같다.

풀이

모형 세우기

입자는 질점으로, 입자를 매단 줄은 가볍고 늘어나지 않는 것으로, 탄성줄은 가볍고 후크의 법칙을 따르는 것으로 모형화한다. 축은 매끄러우므로 각 중심에서의 반력은 그 중심에 대한 모멘트를 갖지 않는다.

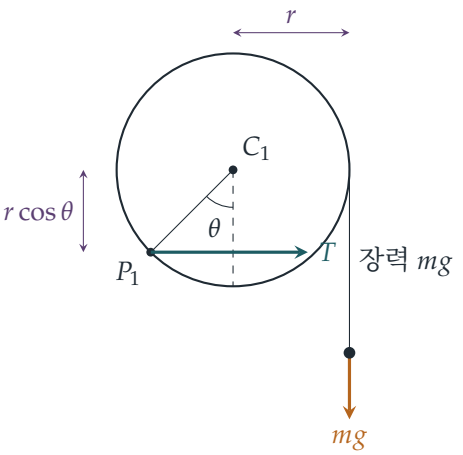
C_1C_2를 수평으로 둔다. 그림에서 P_1은 C_1보다 바깥쪽(왼쪽)으로 $r\sin\theta$만큼, 아래로 $r\cos\theta$만큼 떨어져 있고, P_2는 이와 대칭인 위치에 있다. 따라서 P_1과 P_2는 같은 높이에 있고 탄성줄은 수평이며, 그 길이는

$$P_1P_2 = d + 2r\sin\theta.$$

이다. 탄성줄의 자연 길이(natural length)는 d이므로 늘어난 길이는 $2r\sin\theta$이고, 후크의 법칙에 의해 장력은

$$T = \frac{\lambda\,(2r\sin\theta)}{d}.$$

이다.



W_1에 매달린 입자는 평형 상태로 매달려 있으므로 그 줄의 장력은 mg이다. 이 줄은 W_2에 가까운 쪽에서 바퀴의 접선 방향으로 떨어져 나오며, C_1로부터의 수평 거리는 r이다. 탄성줄은 P_1을 W_2 쪽으로 힘 T로 수평하게 당기고, 그 작용선은 C_1보다 $r\cos\theta$만큼 아래에 있다.

평형 조건

C_1에 대한 모멘트를 구하자. 무게는 W_1을 (그림에서) 시계 방향으로 모멘트 mgr만큼 돌리고, 장력은 반시계 방향으로 모멘트 $Tr\cos\theta$만큼 돌린다. 따라서 $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$를 이용하면

$$mgr = Tr\cos\theta = \frac{2\lambda r\sin\theta}{d}\, r\cos\theta = \frac{\lambda r^2 \sin 2\theta}{d},$$

이다. 양변을 λr^2으로 나누면

$$\sin 2\theta = \frac{mgd}{\lambda r},$$

를 얻어 원하는 결과가 나온다. 대칭성에 의해 C_2에 대한 모멘트를 구해도 같은 방정식이 나온다.

어떤 각도가 허용되는가?

생각해 보기 왜 θ는 아무 각도나 될 수 없어서 $\sin 2\theta = k$가 무한히 많은 해를 갖지 않는 것일까?

장력의 모멘트는 무게의 모멘트와 반대 방향이어야 한다. $\sin\theta \le 0$이면 점 P_1과 P_2 사이의 거리가 d 이하이므로 탄성줄이 느슨해져 $T = 0$이 되고, mgr과 균형을 이룰 것이 없다. $\cos\theta \le 0$이면 줄이 C_1과 같은 높이이거나 그보다 위를 지나므로, C_1에 대한 줄의 모멘트는

o이거나 바퀴를 무게와 같은 방향으로 돌린다. 어느 경우든 평형은 없다. 따라서 평형이 되려면

$$0 < \theta < \tfrac{\pi}{2}, \qquad \text{즉,} \qquad 0 < 2\theta < \pi.$$

이어야 한다. (두 바퀴가 **서로 다른** 각도에 있을 수 있을까? 각 중심에 대한 장력의 모멘트는 T에 그 중심에서 직선 P_1P_2까지의 수직 거리를 곱한 것이며, 두 모멘트 모두 mgr과 같아야 한다. 따라서 C_1과 C_2는 이 직선으로부터 같은 거리에 있고, 직선에 대해 같은 쪽, 즉 직선이 중심들보다 아래에 있다. 그러므로 이 직선은 C_1C_2와 평행하고, P_1과 P_2는 같은 깊이에 있으며 두 각도는 같다. 두 각도의 부호가 반대라면 줄의 길이가 정확히 d가 되어 느슨해지기 때문이다. 따라서 모든 평형은 그림과 같은 대칭적인 형태이다.)

$k = \dfrac{mgd}{\lambda r} > 0$이라 하자. $0 < 2\theta < \pi$에서 $\sin 2\theta$는 0에서 증가하여 $2\theta = \frac{\pi}{2}$일 때 1이 되고 다시 0으로 감소하므로, $(0, 1)$의 모든 값을 정확히 두 번, 값 1을 정확히 한 번 취한다. 따라서 방정식 $\sin 2\theta = k$는

- $k > 1$이면 해가 없다.
- $k = 1$이면 정확히 하나의 해 $\theta = \frac{\pi}{4}$를 갖는다.
- $0 < k < 1$이면 정확히 두 개의 해 $\theta = \alpha$와 $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$를 갖는다. 여기서 $\alpha = \frac{1}{2}\arcsin k \in (0, \frac{\pi}{4})$이다.

$k > 1 \iff \lambda < \dfrac{mgd}{r}$이므로 답은 다음과 같다.

소문항 (i)

$\lambda < \dfrac{mgd}{r}$일 때 평형 위치는 없다. 탄성줄이 너무 약해서 어떤 각도에서도 입자를 붙잡아 둘 수 없다.

소문항 (ii)

$\lambda = \dfrac{mgd}{r}$일 때 평형 위치는 단 하나이며, $\theta = \frac{\pi}{4}$이다.

소문항 (iii)

$\lambda > \dfrac{mgd}{r}$일 때 평형 위치는 정확히 두 개이며, $\theta = \alpha$와 $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$이다.

소문항 (iv)

θ가 $(0, \frac{\pi}{2})$로 제한되므로, 평형 위치가 두 개보다 많아지는 λ의 값은 없다.

검산

- 차원(dimensions): λ는 힘이고 mg도 힘이며, d/r은 길이의 비이므로 $mgd/(\lambda r)$은 사인 값이 그래야 하듯 무차원이다.
- 극한의 경우: $\lambda \to \infty$이면 줄은 늘어나지 않게 되고, 두 해는 각각 $\theta \to 0$ (아주 작은 늘어남, 큰 장력)과 $\theta \to \frac{\pi}{2}$ (줄이 중심과 거의 같은 높이에 있어 모멘트 팔이 아주 짧음)로 다가간다. 둘 다 타당하다.
- 수치적으로, $m = 1$, $d = 4$, $r = 1$, $g = 9.8$, $\lambda = 3mgd/r$로 두어 $k = \frac{1}{3}$이 되게 하면, 두 바퀴 전체를 (두 각도가 달라질 수 있도록) 모형화했을 때 평형은 정확히 두 개이며 $\theta \approx 0.1699$와 $\theta \approx 1.4009$에 있다. 이는 각각 $\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3}$과 $\frac{\pi}{2}$에서 그 값을 뺀 것이다.

흔한 실수

- 늘어난 길이를 $2r\sin\theta$가 아니라 $r\sin\theta$로 잡는 것. 줄의 양 끝이 모두 바깥쪽으로 움직인다.
- 장력의 모멘트 팔(moment arm)로 $r\sin\theta$를 쓰는 것. 장력은 수평이므로 그 팔은 **수직** 거리 $r\cos\theta$이다.
- $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$만이 물리적으로 가능하다는 것을 잊고 (iv)에 "무한히 많다"라고 답하는 것.

STEP 너머

매개변수가 변할 때 평형의 개수를 세는 것은 **분기 이론**(*bifurcation theory*)의 출발점이다. 여기서는 $\lambda > mgd/r$일 때의 두 평형이 $\lambda = mgd/r$에서 합쳐진 뒤 사라지는데, 이를 안장-마디(saddle-node) 분기(또는 접힘(fold) 분기)라고 한다. 위치 에너지(potential energy)를 살펴보면 두 평형 중 하나는 안정(stable)하고 다른 하나는 불안정(unstable)하다는 것이 드러나는데, 이는 접힘 분기의 전형적인 특징이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 모멘트, 강체의 평형, 그리고 위치 에너지를 이용한 안정성을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.