풀이

STEP II 1992, 문제 11

역학 • 포물체 운동

> **STEP II 1992, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q11

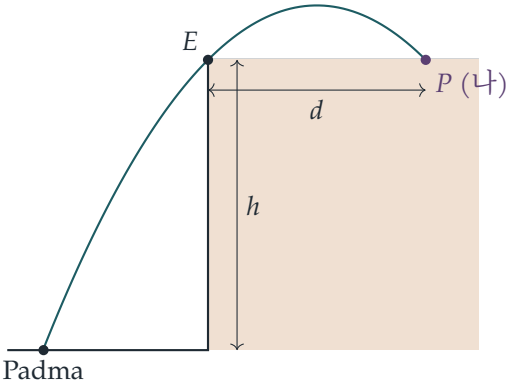
핵심 아이디어

이 던지기에서 까다로운 부분은 지갑을 높이 h까지 올리는 것이 아니라 절벽 꼭대기를 가로질러 보내는 것이다. 지갑은 절벽 가장자리에서 나에게 이르기까지, 즉 수평 거리로 적어도 d만큼, 줄곧 높이 h 이상에 있어야 한다. 그러므로 지갑이 처음으로 높이 h에 도달하는 순간부터의 운동만 살펴보자. 그때부터 지갑은 평지(절벽 꼭대기의 높이) 위의 평범한 포물체(projectile)이고, 그 속력은 에너지 보존(energy conservation)으로 알 수 있으며, 나머지는 익숙한 최대 도달 거리(maximum range) u^2/g가 해결해 준다.

풀이

모형

지갑을 공기 저항(air resistance) 없이 중력만 받으며 자유롭게 움직이는 질점(particle)으로 보고, 지면 높이에서 던진다고 하자(Padma의 키는 무시한다). 절벽의 위쪽 가장자리를 E, 내가 서 있는 지점을 P라 하면, P는 높이 h에 있고 E에서 수평 거리 d만큼 더 떨어져 있다. 절벽 면은 수직이고 해변은 절벽을 사이에 두고 나와 반대쪽에 있으므로, Padma가 어디에 서든 지갑은 E 위를 지나간 뒤(최악의 경우 E를 살짝 스친 뒤) P로 내려와야 한다.



풀이 내내 한 가지 사실을 사용한다. 어떤 높이에서 질점의 속력이 u이고 수평선 위로 각 α를 이루며 움직이면, 질점은 시간 $2u\sin\alpha/g$ 뒤에 같은 높이로 돌아오고, 그동안 수평으로

$$\frac{2u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{u^2\sin 2\alpha}{g} \le \frac{u^2}{g},$$

만큼 이동한다. 등호는 정확히 $\alpha = 45^\circ$일 때 성립한다.

조건은 필요조건이다

어떤 던지기로 지갑이 P에 도달한다고 하자. 지갑은 높이 h에 도달해야 하므로, 경로에서 처음으로 높이 h가 되는 점을 Q라 하자. 절벽 아래를 위치 에너지(potential energy)의 기준으로 잡으면, 에너지 보존에 의해 Q에서의 속력 u는

$$u^2 = V^2 - 2gh.$$

이다.

생각해 보기 왜 Q는 P에서 수평 거리로 적어도 d만큼 떨어져 있어야 할까?

지갑의 수평 위치가 절벽 면의 위치와 같아질 때, 지갑은 높이 h 이상에 있어야 한다. 그렇지 않으면 절벽 면에 부딪히기(또는 가장자리 아래로 지나가기) 때문이다. 지갑의 높이는 0에서부터 연속적으로 올라가므로, 그 시점에는 이미 높이 h에 도달해 있다. 즉 Q는 E의 해변 쪽에 있거나 E와 일치한다. P는 E에서 수평 거리 d만큼 더 떨어져 있으므로, Q에서 P까지의 수평 거리는 적어도 d이다.

Q와 P 사이에서 지갑은 속력 u로 출발하여 높이 h에서 다시 높이 h로 돌아온다. 도달 거리에 관한 사실에 의해, 이 구간에서 이동하는 수평 거리는 많아야 u^2/g이다. 따라서

$$d \le \frac{u^2}{g} = \frac{V^2 - 2gh}{g}, \qquad \text{즉,} \qquad V^2 \ge g(2h + d).$$

조건은 충분조건이다

이제 $V^2 \geq g(2h+d)$라 하자. 그러면 $u^2 = V^2 - 2gh \geq gd > 0$이므로 $gd/u^2 \leq 1$이고, $0 < \alpha \leq 45°$이면서

$$\sin 2\alpha = \frac{gd}{u^2}.$$

을 만족하는 각 α를 고를 수 있다. 속력 u로 E를 지나면서 해변에서 멀어지는 방향으로 수평선 위로 각 α를 이루며 움직이는 포물선 경로를 생각하자. 도달 거리에 관한 사실에 의해, 이 경로는 E에서 수평 거리 $u^2 \sin 2\alpha / g = d$만큼 떨어진 곳에서 다시 높이 h로 내려오는데, 그곳이 바로 P이다. E와 P 사이에서 경로는 높이 h보다 위에 있으므로 절벽 꼭대기에 걸리지 않는다.

이 경로를 E에서부터 시간을 거슬러 따라가 보자. 더 이른 시각일수록 지갑은 더 낮고 해변 위로 더 멀리 나가 있다(연직 속도가 더 컸고 위쪽을 향했기 때문이다). 따라서 경로는 절벽 아래에서 양의 수평 거리만큼 떨어진 해변의 어떤 점에서 지면과 만난다. E에 이르기 전까지 경로는 전부 절벽 면의 해변 쪽에 있으므로 가로막는 것이 없고, 해변이 넓으므로 Padma는 그 점에 설 수 있다. 에너지 보존에 의해 그 점에서의 속력은 $\sqrt{u^2 + 2gh} = V$이다. 그러므로 Padma가 그 점에서 경로의 방향으로 속력 V로 던지면, 지갑은 이 경로를 따라 움직여 나에게 도달한다.

(정확히 $V^2 = g(2h+d)$이면 $\alpha = 45°$이고 지갑은 가장자리 E를 살짝 스친다. V가 더 크면 $(0°, 90°)$에서 가능한 각이 두 개 있고, 두 경우 모두 지갑은 가장자리보다 확실히 위로 지나간다.)

두 부분을 합하면, Padma가 지갑을 나에게 던질 수 있을 필요충분조건은 $V^2 \geq g(2h+d)$이고, 이것이 증명하려던 것이다.

검산

- $d = 0$이면 조건은 $V^2 \geq 2gh$가 되는데, 이는 연직으로 던져서 높이 h에 도달하는 데 꼭 필요한 조건이다.
- $h = 0$이면 조건은 $V^2 \geq gd$가 되는데, 이는 평지에서의 통상적인 최대 도달 거리이다.
- 절벽 가장자리를 무시하면 Padma가 할 수 있는 최선은 절벽 아래에 서는 것이고, 모든 궤적의 경계 포물선(bounding parabola)은 $V^2 \geq g\left(h + \sqrt{h^2 + d^2}\right)$만을 주는데, $\sqrt{h^2 + d^2} \leq h + d$이므로 이는 더 약한 조건이다. 따라서 실제로 결정적인 제약은 가장자리이다.
- 수치로 확인해 보면, $g = 9.8$, $h = 20$, $d = 15$일 때 임계 속력은 $\sqrt{539} \approx 23.2\ \mathrm{m\,s^{-1}}$이다. Padma는 절벽 아래에서 약 11.4 m 떨어진 곳에 서고, 던지기를 단계별로 시뮬레이션하면 지갑은 E를 스치며 가장자리에서 15.0 m 떨어진 곳에 떨어진다. 임의의 h, V에

대해 모든 발사각을 훑어본 결과, 경로에서 높이가 h인 두 점 사이의 수평 간격의 최댓값은 $(V^2 - 2gh)/g$임이 확인되었다.

흔한 실수

- 절벽 아래에서 본 점 P에 대한 경계 포물선만 사용하는 것. 이는 절벽 가장자리를 무시하므로, 필요조건이기는 하지만 충분조건은 아닌 조건을 준다.
- 한 방향만 증명하는 것. "충분" 방향을 보이려면 구체적인 던지기를 제시해야 하며, 그 던지기가 해변에서 시작하고 절벽에 부딪히지 않는다는 확인도 포함해야 한다.

STEP 너머

높이 h에서 운동을 새로 시작하는 기법이 통하는 이유는 운동 방정식이 시간이 흐르거나 수평으로 평행이동해도 변하지 않으므로, 궤적 위의 어느 점이든 새로운 발사점으로 볼 수 있기 때문이다. "어떤 목표에 도달할 수 있는가?" 꼴의 문제는 곡선족의 포락선(envelope)에 관한 문제이며, 장애물이 있을 때는 가장 먼저 걸리는 제약이 답을 결정한다. 이 아이디어는 최적화(optimisation)와 변분법(calculus of variations)에서 다시 등장한다. 포물체 운동과 에너지 방법을 더 공부하려면 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)가 좋은 다음 단계이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.