풀이

# STEP II 1992, 문제 10

순수수학 • 복소평면 위의 자취

**STEP II 1992, 10번 문제**

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/92-s2-q10

## 핵심 아이디어

$\dfrac{z-1}{z} = \dfrac{1-z}{0-z}$로 쓰자. 이 값의 편각(argument)은 방향 $z \to 0$에서 방향 $z \to 1$까지 시계 반대 방향으로 잰 각이다. 따라서 편각을 고정하면 0에서 1까지의 선분이 $z$에서 이루는 각이 고정되고, 그다음은 원에 관한 정리(circle theorems)들(같은 호에 대한 원주각, 원에 내접하는 사각형의 대각)이 해결해 준다. 마지막 소문항도 같은 아이디어인데, 0에서 1까지의 선분 대신 현 $z_4z_2$를 쓴다는 점만 다르다.

## 풀이

(문제의 진술에 오타가 있다. 조건은 $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}\pi$여야 한다.)

두 가지 사실이 모든 일을 해 준다. 첫째, $\arg\dfrac{z-1}{z} = \arg(1-z) - \arg(0-z)$이므로, 이 편각은 $z$에서 직선 $z0$으로부터 직선 $z1$까지 시계 반대 방향으로 잰 각이다. 둘째, 이 값을 보면 $z$가 실수축의 어느 쪽에 있는지 알 수 있다.

$$\operatorname{Im}\frac{z-1}{z} = \operatorname{Im}\left(1-\frac{1}{z}\right) = \operatorname{Im}\left(-\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right) = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|^2}.$$

따라서 $\arg\frac{z-1}{z} \in (0,\pi)$인 것은 정확히 $\operatorname{Im} z > 0$일 때이고, $(-\pi,0)$에 속하는 것은 정확히 $\operatorname{Im} z < 0$일 때이다. 실수축 위의 점에서는 몫이 실수가 되고(편각 0 또는 $\pi$), $z = 0, 1$에서는 편각이 아예 정의되지 않는다.

### 소문항 (i)

여기서 $\operatorname{Im} z > 0$이고, 0에서 1까지의 선분이 $z$에서 이루는 각은 $\alpha$이다. 고정된 현(chord)이 고정된 각을 이루는 실수축 위쪽의 점들은 그 현의 양 끝점을 지나는 원의 한 호를 이룬다(같

은 호에 대한 원주각은 서로 같다). 거꾸로, 그 호 위의 모든 점에서 현을 보는 각은 $\alpha$이며, 점이 현의 위쪽에 있으므로 이 각은 시계 반대 방향이다. 따라서 호 전체가 자취(locus)에 속한다.

원을 구체적으로 정해 보자. 중심각은 $2\alpha$이므로, 길이가 1인 현에 대해 반지름은 $\dfrac{1}{2\sin\alpha}$이고, 중심은 직선 $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$ 위의 높이 $\frac{1}{2}\cot\alpha \geq 0$인 곳에 있다. 자취는 원

$$\left|z - \tfrac{1}{2} - \tfrac{\mathrm{i}}{2}\cot\alpha\right| = \frac{1}{2\sin\alpha}$$

중 실수축 위쪽에 있는 호이며, 끝점 0과 1은 제외한다. $\alpha \leq \frac{1}{2}\pi$이므로 이 호는 우호(major arc)이다. $\alpha = \frac{1}{2}\pi$일 때에는 0에서 1까지를 지름으로 하는 위쪽 반원이 된다(반원에 대한 원주각).

### 소문항 (ii)

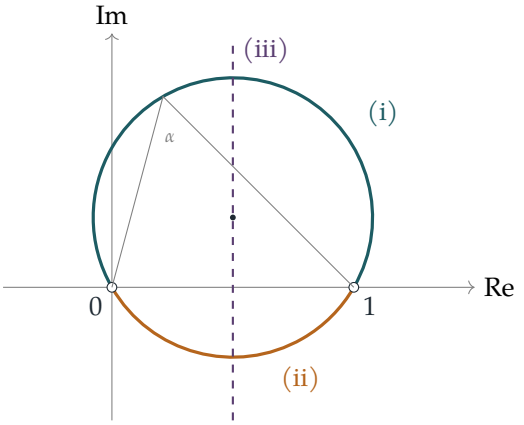
이번에는 편각 $\alpha - \pi$가 $(-\pi, -\frac{1}{2}\pi]$에 속하므로 $\operatorname{Im} z < 0$이고, 현이 $z$에서 이루는 각의 크기는 $\pi - \alpha$이며 시계 방향이다.

**?** **생각해 보기** 현이 실수축 아래쪽에서 $\pi - \alpha$의 각을 이루는 원은 어느 원인가?

(i)과 같은 원이다. $P$가 (i)의 호 위에 있고 $Q$가 그 원의 다른 호 위에 있으면, $0PQ1$(적절한 순서로 잡은 것)은 $P$와 $Q$가 마주 보는 꼭짓점인 원에 내접하는 사각형(cyclic quadrilateral)이므로, $P$와 $Q$에서의 각의 합은 $\pi$이다. 따라서 실수축 아래쪽의 열호(minor arc)가 바로 각이 $\pi - \alpha$인 곳이다. 자취는 (i)의 원 중 실수축 아래쪽에 있는 호이며, 이번에도 0과 1은 제외한다. 소문항 (i)과 (ii)를 합치면 0과 1을 뺀 원 전체가 된다. ($\alpha = \frac{1}{2}\pi$이면 (ii)는 아래쪽 반원이다.)

### 소문항 (iii)

$\left|\frac{z-1}{z}\right| = 1$은 $z \neq 0$이면서 $|z-1| = |z|$라는 뜻이다. 즉 $z$는 0과 1에서 같은 거리에 있다. 자취는 수직이등분선(perpendicular bisector), 곧 직선 $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$이다.




그림은 $\alpha = \frac{1}{3}\pi$인 경우이다. 청록색 우호가 (i), 호박색 열호가 (ii), 자주색 점선이 (iii)이며, 속이 빈 동그라미는 제외되는 점 0과 1을 나타낸다.

### 마지막 소문항

$f(z) = \dfrac{z - z_2}{z - z_4}$라 하자. $(z_1 - z_4)(z_3 - z_2) = (z_4 - z_1)(z_2 - z_3)$이므로

$$\frac{f(z_1)}{f(z_3)} = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)} = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_4 - z_1)(z_2 - z_3)} = w,$$

이고, 따라서 $\arg w = \arg f(z_1) - \arg f(z_3) \pmod{2\pi}$이다.

함수 $f$는 소문항 (i)과 (ii)의 함수를 새로운 좌표로 나타낸 것이다. $z = z_4 + (z_2 - z_4)u$로 놓자. 이것은 회전과 확대 다음에 평행이동을 한 것으로, $u = 0, 1$을 각각 $z_4, z_2$로 보낸다. 그러면

$$f(z) = \frac{(z_2 - z_4)(u - 1)}{(z_2 - z_4)u} = \frac{u - 1}{u}.$$

네 점을 지나는 원은 $u$평면에서 0과 1을 지나는 원에 대응한다.

> **생각해 보기** $z_1$과 $z_3$은 왜 서로 다른 호 위에 있는가?

네 점은 원을 따라 $z_1, z_2, z_3, z_4$의 순서로 놓여 있으므로, 현 $z_2z_4$는 원을 두 호로 나누고, 한 호에는 $z_1$이, 다른 호에는 $z_3$이 들어 있다. $u$평면에서 이 두 호 중 하나는 실수축 위쪽에, 다른 하나는 아래쪽에 있다.

(i)과 (ii)에 의해, $\frac{u-1}{u}$의 편각은 위쪽 호에서 일정한 값 $\beta \in (0, \pi)$를, 아래쪽 호에서 값 $\beta - \pi$를 갖는다. 여기서는 $\beta \le \frac{1}{2}\pi$를 가정하지 않는다. 위의 원에 관한 정리를 이용한 논증은 그 제한을 한 번도 쓰지 않았기 때문이다. 따라서

$$\arg w = \arg f(z_1) - \arg f(z_3) = \pm\big(\beta - (\beta - \pi)\big) = \pm\pi \pmod{2\pi},$$

이므로 $w$는 실수이며, 사실 음수이다. ■

## 검산

정사각형 $z_1 = 1, z_2 = \mathrm{i}, z_3 = -1, z_4 = -\mathrm{i}$에 대해 $w = \dfrac{(1-\mathrm{i})(-1+\mathrm{i})}{(-1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})} = \dfrac{-(1-\mathrm{i})^2}{-(1+\mathrm{i})^2} = \dfrac{-2\mathrm{i}}{2\mathrm{i}} = -1$을 얻으며, 이는 음의 실수이다. (i)에 대해서는 $\alpha = \frac{1}{2}\pi, z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$로 잡자. 그러면 $\frac{z-1}{z} = \frac{-1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \mathrm{i}$이고, 그 편각은 $\frac{1}{2}\pi$이다. 또한 여러 $\alpha$ 값에 대해 각 호가 앞에서 말한 편각을 갖는다는 것과, 무작위로 잡은 원 위에 순서대로 놓인 네 점의 무작위 집합 $10^4$개에 대해 $w$가 음의 실수라는 것을 수치적으로 확인하였다.

## 흔한 실수

- (i)의 답으로 원 전체를 제시하는 것. 올바른 편각을 갖는 것은 한 호뿐이며, 다른 호에서는 편각이 $\alpha - \pi$가 되는데, 이것이 바로 소문항 (ii)이다.
- 편각이 정의되지 않는 0과 1을 제외하는 것을 잊는 것.
- $(z_4 - z_1)(z_2 - z_3)$의 음의 부호들을 잘못 다루어 $\arg w$의 부호를 틀리는 것. 위와 같이 부호를 짝지어 처리하면 이를 피할 수 있다.

## STEP 너머

양 $w$는 (부호와 순서를 제외하면) 네 점의 **복비**(*cross-ratio*)이다. 복비는 모든 뫼비우스 변환(Möbius transformation) $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$에 대해 변하지 않으며, 네 점이 한 원 또는 한 직선 위에 있는 것은 정확히 그 복비가 실수일 때이다. 뫼비우스 변환은 원과 직선을 원과 직선으로 보내므로, 이로부터 네 점이 한 원 위에 있음(concyclicity)을 깔끔하게 증명하는 방법을 얻는다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이러한 기하학적 관점을 아름답게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.