풀이

STEP II 1992, 문제 1

순수수학 • 수열의 극한

> **STEP II 1992, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q1

핵심 아이디어

각 극한(limit)마다 표준적인 방법이 하나씩 필요하고, 관건은 알맞은 방법을 골라내는 것이다. 유리함수(rational function)라면 분자와 분모를 n의 최고차 거듭제곱으로 나눈다. 유계인 것을 커지는 것으로 나눈 꼴이라면 조임 정리(squeeze theorem)를 쓴다. 알려진 극한이 모습을 바꾸어 숨어 있다면, 치환을 해서 그 겉모습을 벗겨 낸다. 그리고 제곱근의 차라면 켤레(conjugate)를 곱한다. 그러면 거의 같은 두 양의 차가 한눈에 파악할 수 있는 몫으로 바뀐다.

풀이

소문항 (i)

분자와 분모를 n으로 나누면

$$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \longrightarrow \frac{1}{1+0} = 1,$$

이다. $\frac{1}{n} \to 0$이기 때문이다. 극한은 1이다.

소문항 (ii)

최고차 거듭제곱은 n^2이고, 이것은 분모에만 나타난다. 분자와 분모를 n^2으로 나누면

$$\frac{5n+1}{n^2-3n+4} = \frac{\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}} \longrightarrow \frac{0}{1} = 0.$$

극한은 0이다. 분모는 n^2처럼 커지지만 분자는 n처럼만 커지기 때문이다.

소문항 (iii)

큰 정수 n에 대해 $\sin n$에 관해 쓸모 있게 아는 것은 유계(bounded)라는 사실, 곧 $|\sin n| \leq 1$이라는 것뿐이다. 그런데 그것으로 충분하다.

$$\left|\frac{\sin n}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \longrightarrow 0.$$

이기 때문이다. 따라서 $\dfrac{\sin n}{n}$은 $-\frac{1}{n}$과 $\frac{1}{n}$ 사이에 끼어 있고, 이 둘은 모두 0으로 수렴(converge)하므로 극한은 0이다.

소문항 (iv)

? **생각해 보기** 이것은 (iii)과 같은 문제가 아닌가?

그렇지 않다. 여기서는 각 $1/n$이 커지는 것이 아니라 0으로 줄어든다. $x = 1/n$으로 놓자. $n \to \infty$일 때 $x \to 0^+$이고, 식은 $\dfrac{\sin x}{x}$가 된다. $x \to 0$일 때 이 식의 극한은 다음과 같은 표준적인 결과이다.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

(이를 이해하는 한 가지 방법은, 이것이 0에서 sin의 미분계수(derivative), 곧 $\cos 0 = 1$이라는 것이다. 또는 $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \cdots$를 이용하면 $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \cdots$이다.) 극한은 1이다.

소문항 (v)

$n \to \infty$일 때 $\arctan n \to \frac{\pi}{2}$이다. $\theta \to \frac{\pi}{2}$일 때(아래쪽에서 접근할 때) $\tan\theta \to +\infty$이고, arctan은 연속(continuous)이며 증가하기 때문이다. 극한 $\frac{\pi}{2}$는 0이 아니므로 역수를 취할 수 있다.

$$(\arctan n)^{-1} \longrightarrow \frac{1}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}.$$

$(\arctan n)^{-1}$은 $1/\arctan n$을 뜻하며, arctan의 역함수(inverse function)(그것은 그냥 tan이 된다)가 아님에 주의한다.

소문항 (vi)

분자와 분모가 모두 0으로 수렴하므로, 극한을 따로따로 구할 수는 없다. 각각에 켤레를 곱하자.

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}, \qquad \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}.$$

따라서 분자와 분모를 $\sqrt{n}$으로 나누면

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}{2(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1)},$$

이다. $n \to \infty$일 때 두 제곱근은 모두 1로 수렴하므로($\sqrt{\ }$가 연속이기 때문이다) 극한은

$$\frac{1+1}{2(1+1)} = \frac{1}{2}.$$

생각해 보기 왜 답이 이를테면 1이 아니라 $\frac{1}{2}$이어야 하는가?

큰 n 근처에서 $\sqrt{x}$의 그래프는 기울기(gradient)가 $\frac{1}{2\sqrt{n}}$인 직선에 가깝다. 따라서 $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \approx \frac{1}{2\sqrt{n}}$(폭 1만큼 이동)이고 $\sqrt{n+2}-\sqrt{n} \approx \frac{2}{2\sqrt{n}}$(폭 2만큼 이동)이다. 그러므로 그 비는 이동 폭의 비인 약 $\frac{1}{2}$이다.

검산

큰 n을 대입해 보자. $n = 10^6$일 때 (i)은 0.999999, (ii)는 5×10^{-6}, (iii)은 약 -3.5×10^{-7}, (iv)는 소수점 아래 일곱째 자리까지 1.0000000, (v)는 0.636620으로 $2/\pi \approx 0.636620$과 일치하며, (vi)은 유리화(rationalise)한 식으로 계산하면 0.50000012이다. (vi)에서는 작은 n에서 유리화한 식과 원래 식을 비교해 보는 것도 좋다. $n = 1$에서 둘 다 $(\sqrt{2}-1)/(\sqrt{3}-1) \approx 0.5658$이다.

흔한 실수

- (iii)과 (iv)를 같은 것으로 취급하는 것. (iii)에서는 사인이 유계인 채로 분모가 커지고, (iv)에서는 분자와 분모가 모두 0으로 줄어들며 그 비가 1로 수렴한다.
- (v)의 $(\arctan n)^{-1}$을 역함수로 읽는 것.
- (vi)을 아주 큰 n에서 원래 식 그대로 계산기로 계산하는 것. 거의 같은 수끼리 빼면 정확도가 떨어진다. 먼저 유리화하라.

STEP 너머

대학에서는 "$a_n \to L$"을 엄밀하게 정의한다. 모든 $\varepsilon > 0$에 대하여 어떤 N이 존재하여, $n > N$인 모든 n에 대해 $|a_n - L| < \varepsilon$이 성립한다는 것이다. 위에서 쓴 모든 방법, 이를테면 (iii)의 조임 정리, (v)에서 0이 아닌 극한의 역수를 취하는 것, (vi)에서 연속함수를 통해 극

한을 옮기는 것은 첫 해석학(analysis) 강의에서 이 정의로부터 증명하는 정리(theorem)가 된다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 이러한 개념들을 꼼꼼하고 읽기 쉽게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.