풀이

STEP I 1992, 문제 9

순수수학 • 미분방정식

> **STEP I 1992, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q9

핵심 아이디어

모든 것은 하나의 식에서 나온다. 물의 **부피**(volume)의 변화율은 (들어오는 비율)에서 (나가는 비율)을 뺀 것과 같다. 닮은 삼각형(similar triangles)에 의해 부피는 깊이 x의 간단한 함수가 되므로, 연쇄법칙(chain rule)을 쓰면 이 식은 x에 대한 미분방정식(differential equation)이 된다. 첫 번째 부분에서는 이 방정식의 변수가 깔끔하게 분리된다. 두 번째 부분에서는 방정식을 푸는 대신 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$의 부호와 그것이 0이 되는 깊이로부터 거동을 읽어 낸다.

풀이

원뿔 비우기

물의 깊이가 x cm일 때 물은 필터 전체와 닮은, 높이 x, 반지름 r인 더 작은 원뿔을 채운다. 닮은 삼각형에 의해 $r/x = a/H$이므로 $r = ax/H$이고, 물의 부피는

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 x = \frac{\pi a^2 x^3}{3H^2}.$$

이다. 연쇄법칙에 의해

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi a^2 x^2}{H^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$$

이다. 물은 비율 Ax로 빠져나가기만 하므로 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t = -Ax$이다. 따라서

$$\frac{\pi a^2 x^2}{H^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -Ax \quad \Longrightarrow \quad x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{AH^2}{\pi a^2},$$

이다. 여기서 x로 나누었는데, 원뿔에 아직 물이 남아 있는 동안($x > 0$)에는 이렇게 해도 된다. 좌변은 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{2}x^2)$이므로 $\frac{1}{2}x^2$은 **일정한** 비율 $AH^2/(\pi a^2)$로 감소한다. 이 값은 $\frac{1}{2}h^2$에서 시

작하고 0에 이르면 원뿔이 빈다. 따라서 걸리는 시간은

$$T = \frac{\frac{1}{2}h^2}{AH^2/(\pi a^2)} = \frac{\pi a^2 h^2}{2AH^2} \text{ 초},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. (같은 방법으로, 변수분리(separation of variables)를 하면 $\int_h^0 x\,\mathrm{d}x = -\frac{AH^2}{\pi a^2}\int_0^T \mathrm{d}t$이다.)

물을 부어 넣기도 할 때

이제 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t = B - Ax$이므로

$$\frac{\pi a^2 x^2}{H^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = B - Ax, \qquad \text{즉} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{H^2(B-Ax)}{\pi a^2 x^2}.$$

이다. $x > 0$이므로 인수 $H^2/(\pi a^2 x^2)$은 양수이고, 따라서 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$의 부호는 $B - Ax$의 부호와 같다. $c = B/A$라 하자. 그러면

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} > 0, \text{ 단} x < c, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0, \text{ 단} x = c, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} < 0, \text{ 단} x > c.$$

이다. 따라서 $x = c$는 들어오는 양과 나가는 양이 정확히 균형을 이루는 평형(equilibrium) 깊이이고, 수면은 언제나 c를 **향해** 움직인다. 이것은 $c \le H$일 때에만 필터 안에서 물리적으로 가능하므로, 경우는 c를 h, H와 비교하여 나뉜다.

> **생각해 보기** 수면이 c를 향해 움직인다면, 실제로 c에 도달하는가, 아니면 지나쳐 버리는가?

지나칠 수는 없다. c를 지나려면 먼저 c와 같아져야 하는데, 그 지점에서는 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = 0$이기 때문이다. 사실 수면은 유한한 시간 안에 c에 결코 도달하지 않는다. t를 x의 함수로 보면, h에서 h와 c 사이의 깊이 X까지 가는 데 걸리는 시간은

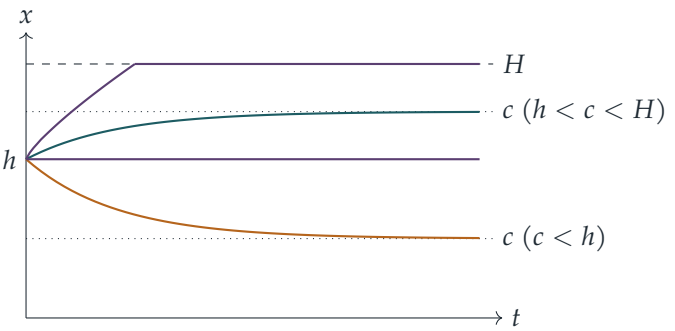
$$t = \int_h^X \frac{\pi a^2 x^2}{H^2(B-Ax)}\,\mathrm{d}x = \int_h^X \frac{\pi a^2 x^2}{AH^2(c-x)}\,\mathrm{d}x.$$

이다. $x = c$ 근처에서 피적분함수(integrand)는 $\frac{\pi a^2 c^2}{AH^2}\cdot\frac{1}{c-x}$처럼 행동하고, 그 적분은 $-\ln(c-x)$의 상수배이다. 이것은 $X \to c$일 때 무한대로 발산한다. 따라서 수면은 점점 더 느리게 c에 다가가며, "무한한 시간이 지난 뒤에야" 도달한다. 어느 쪽에서 다가가든 같은 논증이 성립한다.

따라서 경우는 다음과 같다.

- $B < Ah$ (즉 $c < h$). 처음에 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t < 0$이다. 수면은 점점 느려지면서 내려가고, 위쪽에서 $c = B/A$에 수렴(converge)하지만 도달하지는 않는다. 특히 첫 번째 부분과 달리 원뿔은 결코 비지 않는다($c > 0$이므로).

- $B = Ah$ (즉 $c = h$). 이때는 처음부터 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = 0$이다. 물이 빠져나가는 속도만큼 들어오므로 수면은 h에 머문다.
- $Ah < B < AH$ (즉 $h < c < H$). 수면은 점점 느려지면서 올라가고, 아래쪽에서 B/A에 수렴한다. 수면은 H 아래에 머물므로 필터는 결코 넘치지 않는다.
- $B = AH$ (즉 $c = H$). 수면은 가장자리를 향해 올라가 H에 수렴하지만, 위의 논증에 의해 결코 정확히 도달하지는 않으므로 (이 모형에서는) 결코 넘치지 않는다.
- $B > AH$ (즉 $c > H$). 이제 모든 $x \le H$에 대해 $B - Ax \ge B - AH > 0$이고 $x^2 \le H^2$이므로
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \ge \frac{H^2(B - AH)}{\pi a^2 H^2} = \frac{B - AH}{\pi a^2} > 0.$$
이다. 수면이 올라가는 속도가 양의 상수로 아래로 유계이므로, 수면은 유한한 시간, 많아야 $\pi a^2(H - h)/(B - AH)$초 안에 가장자리에 도달한다. 그 뒤로 필터는 넘친다. 수면은 H에 머물고, 초과분 $B - AH\ \mathrm{cm^3\,s^{-1}}$는 위로 흘러넘친다.



그림은 전형적인 거동을 보여 준다. c로 내려가는 경우(호박색), h에 머무르거나 유한한 시간 뒤에 넘치는 경우(자주색), c로 올라가는 경우(청록색)이다.

검산

- $B = 0$으로 두면 $c = 0$이다. 수면은 0을 향해 내려가며, 이는 첫 번째 부분과 일치한다(그 경우에는 0에 **실제로** 도달하는데, 유출량 Ax는 x에 비례하는 반면 부피는 x^3처럼 변하므로 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = -AH^2/(\pi a^2 x)$가 0으로 가지 않기 때문이다).
- 수치적으로 $a = 3$, $H = 8$, $A = 0.7$, $h = 5$로 두면 공식은 $T \approx 7.889$ 초를 주며, x^2을 시간에 따라 단계별로 계산해도 같은 값이 나온다. 두 번째 방정식을 수치적으로 적분하면 각 경우가 확인된다. 예를 들어 $B/A = 9 > H$이면 수면은 약 41.5 초 뒤에 H에 도달하고, $B/A = 7$이면 7과의 차이가 ε 이내가 되는 데 걸리는 시간이 ε을 10으로 나눌 때마다 약 71 초씩 늘어나는데, 이것이 위에서 예측한 로그적 증가이다.

흔한 실수

- 높이 x인 닮은 원뿔의 부피 대신 원기둥의 부피 $\pi a^2 x$를 사용한다.
- 수면이 유한한 시간 안에 B/A에 도달한다거나, 지나쳐서 진동한다고 주장한다.
- 가장자리를 잊는다. 평형 B/A는 $B/A \leq H$일 때에만 도달하며, 그렇지 않으면 필터가 넘친다.

STEP 너머

두 번째 부분은 미분방정식의 **정성적** 이론(qualitative theory)을 처음 맛보는 것이다. $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = f(x)$에 대해 평형점($f$의 영점)을 찾고, 양쪽에서의 f의 부호로 그 안정성(stability)을 판정하며, 해의 유일성(uniqueness of solutions)을 이용해 해가 평형점에 다가가기는 하지만 결코 가로지르지는 않음을 보일 수 있다. 이 모든 것을 아무것도 풀지 않고 할 수 있다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)은 이러한 관점에서 자율 방정식(autonomous equations)과 안정성을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.