풀이

STEP I 1992, 문제 8

순수수학 • 미적분학의 기본정리

> **STEP I 1992, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q8

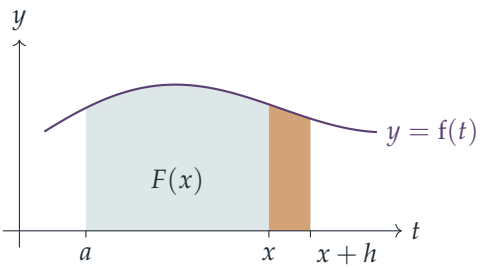
핵심 아이디어

위끝(upper limit)이 변수인 적분은 그 끝이 움직임에 따라 커지는 넓이이며, 그 넓이가 커지는 속도는 그 끝에서의 곡선의 높이와 같다. 이 한 가지 사실, 즉 미적분학의 기본정리(Fundamental Theorem of Calculus)를 쓰면 문제에 나오는 각 **적분방정식**을 **미분방정식**으로 바꿀 수 있다. 미분하면 상수에 대한 정보가 사라지므로, 원래 방정식에 편리한 x의 값, 대개 $x = 0$을 대입하여 그 정보를 항상 되찾는다.

풀이

적분의 도함수

$F(x) = \int_a^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t$라 하자. 이것은 $t = a$와 $t = x$ 사이에서 $y = \mathrm{f}(t)$ 아래의 넓이이다. x를 작은 양 h만큼 늘리면 폭이 h인 가느다란 띠가 더해진다.



이 띠의 넓이는 $F(x+h) - F(x)$이다. f가 연속(continuous)이면 $[x, x+h]$에서 곡선은 $\mathrm{f}(x)$로부터 작은 양 $\varepsilon(h)$ 이내에 머물고, $h \to 0$일 때 $\varepsilon(h) \to 0$이다. 따라서 띠는 높이가

$\mathrm{f}(x) \pm \varepsilon(h)$인 두 직사각형 사이에 놓인다.

$$(\mathrm{f}(x) - \varepsilon(h))h \le F(x+h) - F(x) \le (\mathrm{f}(x) + \varepsilon(h))h.$$

$h > 0$으로 나누고($h < 0$인 경우는 띠가 왼쪽에 있다는 점만 다르고 똑같다) $h \to 0$으로 보내면

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \mathrm{f}(x).$$

a가 나타나지 않는다는 점에 주목하자. 아래끝을 바꾸면 F에 상수가 더해질 뿐이다.

방정식 $\mathrm{f}(x) = \int_0^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t + 1$

위의 결과에 의해 우변은 미분가능하므로 f도 미분가능하고, 양변을 미분하면

$$\mathrm{f}'(x) = \mathrm{f}(x).$$

원래 방정식에 $x = 0$을 대입하면 적분 구간의 길이가 0이므로 $\mathrm{f}(0) = 1$이다.

? **생각해 보기** $\mathrm{f}' = \mathrm{f}$의 해가 e^x의 상수배뿐이라는 것을 어떻게 알 수 있을까?

$g(x) = \mathrm{e}^{-x}\mathrm{f}(x)$를 생각하자. 곱의 미분법(product rule)에 의해

$$g'(x) = \mathrm{e}^{-x}(\mathrm{f}'(x) - \mathrm{f}(x)) = 0,$$

이므로 g는 상수이고, $g(0) = \mathrm{f}(0) = 1$이다. 따라서 $\mathrm{e}^{-x}\mathrm{f}(x) = 1$, 즉 $\mathrm{f}(x) = \mathrm{e}^x$이며, 이것이 보이고자 한 것이다. (거꾸로 $\int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t + 1 = \mathrm{e}^x - 1 + 1 = \mathrm{e}^x$이므로 이것은 실제로 해이다.)

방정식 $\mathrm{f}(x) = \int_0^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t$

앞에서와 똑같이 $\mathrm{f}' = \mathrm{f}$이므로 $\mathrm{e}^{-x}\mathrm{f}(x)$는 상수이다. 그런데 이번에는 $x = 0$을 대입하면 $\mathrm{f}(0) = 0$이므로 그 상수는 0이고, 유일한 해는

$$\mathrm{f}(x) = 0 \quad \text{모든 실수} x.$$

앞의 방정식에서 지수함수의 크기를 정해 준 것은 "+1"이었다. 그것이 없으면 영함수만 살아남는다.

마지막 부분

양변을 x에 대하여 미분한다. 우변에서는 이제 x가 아래끝이고,

$$\int_x^1 t^2\mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t = -\int_1^x t^2\mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \text{이므로} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^1 t^2\mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t = -x^2\mathrm{f}(x).$$

따라서

$$\mathrm{f}(x) = -x^2\mathrm{f}(x) + 1 - x^4,$$
$$(1+x^2)\,\mathrm{f}(x) = 1 - x^4 = (1-x^2)(1+x^2).$$

$1 + x^2 > 0$이므로 이것으로 나눌 수 있고,

$$\mathrm{f}(x) = 1 - x^2.$$

C를 구하기 위해 주어진 방정식에 $x = 0$을 대입한다. 좌변과 항 $x - \frac{x^5}{5}$가 사라지고

$$0 = \int_0^1 t^2(1-t^2)\,\mathrm{d}t + C = \left[\tfrac{t^3}{3} - \tfrac{t^5}{5}\right]_0^1 + C = \tfrac{2}{15} + C,$$

이 남으므로 $C = -\frac{2}{15}$이며, 이것이 보이고자 한 것이다.

생각해 보기 미분해서 알 수 있는 것은 두 변의 도함수가 같다는 것뿐이다. $C = -\frac{2}{15}$일 때 $\mathrm{f}(x) = 1 - x^2$가 정말로 모든 x에 대하여 방정식을 만족할까?

그렇다. 이 f에 대해 두 변은 모든 x에서 도함수가 같으므로 상수만큼 차이가 난다. 그리고 C는 바로 $x = 0$에서 두 변이 일치하도록 고른 것이다. 따라서 두 변은 모든 곳에서 일치한다. 거꾸로, 모든 해는 미분한 방정식을 만족해야 하므로 가능한 f는 $1 - x^2$뿐이다.

검산

- $x = 1$에서: 좌변은 $\int_0^1 (1-t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}$이고, 우변은 $0 + 1 - \frac{1}{5} - \frac{2}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$이다. 둘이 일치한다.
- 수치적으로, 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 $\int_0^1 t^2(1-t^2)\,\mathrm{d}t \approx 0.133333 = \frac{2}{15}$이고, $x = -1.3,\ 0.25,\ 0.5,\ 0.9,\ 2$에서 마지막 방정식의 두 변은 10^{-10} 이내로 일치한다.

흔한 실수

- 변수가 아래끝일 때 음의 부호를 빠뜨리는 것: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^1 g(t)\,\mathrm{d}t = -g(x)$.
- $\mathrm{f}' = \mathrm{f}$를 풀고 $A\mathrm{e}^x$에서 멈추는 것: A를 정해 주는 것은 $x = 0$에서의 원래 적분방정식이다.
- 적분 변수(dummy variable) t와 끝 x를 뒤섞은 $\mathrm{f}(x) = \int_0^x \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$ 같은 식을 쓰는 것.

STEP 너머

미지의 함수가 적분 안에 나타나는 방정식을 **적분방정식**(integral equation)이라 한다. 여기서 다룬 것처럼 끝이 변수인 것은 볼테라(Volterra) 방정식이며, 이는 미분방정식(differential equation)의 초기값 문제(initial-value problem)와 동치이다. 대학의 첫 해석학(analysis) 강의에서는 리만 적분(Riemann integral)의 정의로부터 미적분학의 기본정리를 엄밀하게 증명하며, 위의 띠 논증은 ε–δ 증명이 된다. Abbott의 *Understanding Analysis*가 이를 매우 읽기 쉽게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.