풀이

STEP I 1992, 문제 7

순수수학 • 정숫값 다항식

> **STEP I 1992, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q7

핵심 아이디어

계수(coefficient)가 정수(integer)임을 증명하려 해서는 안 된다. 이차함수(quadratic function)의 경우 계수가 정수일 필요가 없기 때문이다. 실제로 $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$는 모든 정수에서 정숫값을 가진다. 그 대신 주어진 정숫값들로 계수를 나타낸 뒤 다시 대입하여, $\mathrm{f}(n)$이 $\mathrm{f}(-1)$, $\mathrm{f}(0)$, $\mathrm{f}(1)$의 정수 배의 결합으로 나타나게 한다. 그러면 마지막 부분은 원점을 옮긴(shift of origin) 뒤 가운데 부분을 다시 적용한 것에 지나지 않는다.

풀이

일차함수

$\mathrm{g}(0) = b$이고 $\mathrm{g}(1) = a + b$이므로 $b = \mathrm{g}(0)$, $a = \mathrm{g}(1) - \mathrm{g}(0)$이고, 둘 다 정수이다. 따라서 임의의 정수 n에 대하여

$$\mathrm{g}(n) = an + b = \mathrm{g}(0) + n(\mathrm{g}(1) - \mathrm{g}(0)),$$

이고, 이는 정수끼리의 곱의 합이므로 정수이다.

이차함수

$p = \mathrm{f}(-1)$, $q = \mathrm{f}(0)$, $r = \mathrm{f}(1)$로 놓으면, 이들은 모두 정수이다. 그러면

$$p = A - B + C, \qquad q = C, \qquad r = A + B + C,$$

이고, 이를 풀면

$$C = q, \qquad B = \frac{r - p}{2}, \qquad A = \frac{p + r - 2q}{2}.$$

따라서 A와 B는 정수일 필요가 없으며, 홀수의 절반일 수도 있다. 이 값들을 $\mathrm{f}(n) = An^2 + Bn + C$에 대입하고 p, q, r에 대한 항끼리 묶으면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(n) &= \frac{p+r-2q}{2}\,n^2 + \frac{r-p}{2}\,n + q \\ &= \frac{n(n-1)}{2}\,p + (1-n^2)\,q + \frac{n(n+1)}{2}\,r.\end{aligned}$$

생각해 보기 p와 r에 곱해진 수는 분모에 2가 있다. 이 수들은 왜 정수인가?

정수 n에 대하여 $n-1$과 n은 연속한 두 정수이므로 둘 중 하나는 짝수이고, 따라서 $n(n-1)$은 짝수이다. 마찬가지로 $n(n+1)$도 짝수이다. 그러므로 $\frac{1}{2}n(n-1)$과 $\frac{1}{2}n(n+1)$은 정수이고, $1-n^2$도 정수이다. 따라서 $\mathrm{f}(n)$은 정수끼리의 곱의 합이므로, 요구한 대로 모든 정수 n에 대하여 정수이다.

(곱해진 세 수는 $-1, 0, 1$ 중 하나에서 1이고 나머지 둘에서 0인 이차식이다. 이것이 라그랑주 보간법(Lagrange interpolation)이다.)

마지막 부분

α를 실수라 하고 $\mathrm{h}(x) = \mathrm{f}(\alpha + x)$로 정의하자. 전개하면

$$\mathrm{h}(x) = A(\alpha+x)^2 + B(\alpha+x) + C = Ax^2 + (2A\alpha + B)x + (A\alpha^2 + B\alpha + C),$$

이므로 h도 실수 계수를 가진 $A'x^2 + B'x + C'$ 꼴의 함수이다. 가운데 부분에서는 A, B, C가 실수라는 사실 외에는 아무것도 사용하지 않았다. 이제

$$\mathrm{h}(-1) = \mathrm{f}(\alpha - 1), \qquad \mathrm{h}(0) = \mathrm{f}(\alpha), \qquad \mathrm{h}(1) = \mathrm{f}(\alpha + 1)$$

은 가정에 의하여 정수이다. 따라서 가운데 부분을 h에 적용하면, 모든 정수 n에 대하여 $\mathrm{h}(n) = \mathrm{f}(\alpha + n)$은 정수이다. 명시적으로 쓰면 다음과 같다.

$$\mathrm{f}(\alpha+n) = \frac{n(n-1)}{2}\,\mathrm{f}(\alpha-1) + (1-n^2)\,\mathrm{f}(\alpha) + \frac{n(n+1)}{2}\,\mathrm{f}(\alpha+1).$$

검산

- $\mathrm{f}(n)$에 대한 식에 $n = -1, 0, 1$을 대입하면 곱해진 수들이 $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$이 되어 p, q, r이 다시 나온다.
- 예 $\mathrm{f}(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$는 $p = 0, q = 0, r = 1$이고, 식에 의하여 $\mathrm{f}(n) = \frac{1}{2}n(n+1)$, 즉 삼각수(triangular number)가 나온다.
- 수치적으로, $\alpha = \sqrt{2}$이고 $\mathrm{f}(\alpha - 1) = 3$, $\mathrm{f}(\alpha) = -7$, $\mathrm{f}(\alpha + 1) = 11$일 때 이 점들을 지나는 이차함수는 $\mathrm{f}(\alpha + 5) = 363.000\ldots$을 주며, 이는 $10 \cdot 3 - 24 \cdot (-7) + 15 \cdot 11 = 363$과 일치한다.

흔한 실수

- A, B, C가 반드시 정수라고 주장하는 것. 정수일 필요가 없으며, 이 사실에 기대는 논증은 틀린 것이다.
- 마지막 부분에서 α가 정수나 유리수(rational number)임을 보이려 하는 것. α는 어떤 실수여도 되며, 중요한 것은 평행이동뿐이다.

STEP 너머

모든 정수에서 정숫값을 가지는 다항식(polynomial)은 정확히 이항계수(binomial coefficient) $\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$들의 정수 계수 결합이다. 이차식의 경우 이들은 1, x, $\frac{1}{2}x(x-1)$이며, 이 결과는 유한 차분(finite difference)으로 증명된다. 즉 차수(degree)가 d인 다항식이 연속한 $d+1$개의 정수에서 정숫값을 가지면, 그 다항식은 모든 정수에서 정숫값을 가진다. 같은 아이디어가 수치해석(numerical analysis)에서 뉴턴(Newton)의 전진 차분 공식(forward-difference formula)의 바탕에 깔려 있다. 정숫값 함수와 나누어떨어짐(divisibility)에 대해 더 알고 싶다면 Davenport의 *The Higher Arithmetic*을 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.