풀이

STEP I 1992, 문제 6

순수수학 • 작은 각 근사

> **STEP I 1992, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q6

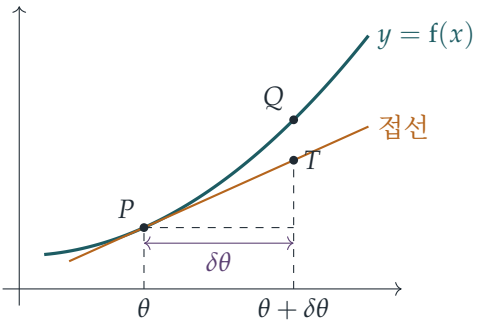
핵심 아이디어

$\theta + \phi$는 삼각형 ABC의 외각(exterior angle)이므로, 먼 점 C에서의 각은 정확히 ϕ이다. 그러면 사인법칙(sine rule)으로 AC를 정확히 구할 수 있다. C가 매우 멀리 있으므로 ϕ는 아주 작아야 하고, 작은 각 근사(small-angle approximation)를 쓰면 정확한 공식이 간단한 식으로 바뀐다. 작은 각 근사는 사실 첫 번째 소문항의 일차 근사가 모습을 바꾼 것이다. 오차에 관한 질문도 같은 일차 근사를 한 번 더 쓰는 것이며, 이번에는 ϕ를 변수로 본다.

풀이

일차 근사

점 $P = (\theta, \mathrm{f}(\theta))$ 근처에서 f의 그래프는 기울기(gradient)가 $\mathrm{f}'(\theta)$인 접선(tangent line)에 매우 가깝다.



오른쪽으로 $\delta\theta$만큼 이동해 보자. 접선을 따라가면 높이는 (기울기)$\times$(가로 이동 거리) $= \mathrm{f}'(\theta)\,\delta\theta$만큼 올라가 T에 이른다. 곡선을 따라가면 높이 $\mathrm{f}(\theta + \delta\theta)$인 Q에 이른다.

$\delta\theta \to 0$일 때 간격 QT는 $\delta\theta$ 자체보다 빠르게 줄어드는데, 그 까닭은

$$\frac{f(\theta+\delta\theta)-f(\theta)}{\delta\theta} \to f'(\theta)$$

가 바로 도함수(derivative)의 정의이기 때문이다. 따라서 $\delta\theta$가 작으면

$$f(\theta+\delta\theta) \approx f(\theta) + f'(\theta)\,\delta\theta.$$

이다.

C까지의 거리

삼각형 ABC에서 A에서의 각은 θ이고, B에서의 외각은 $\theta+\phi$이다. 외각은 이웃하지 않은 두 내각의 합과 같으므로

$$\angle ACB = \phi.$$

이다. B에서의 내각은 $\pi-(\theta+\phi)$이고 $\sin(\pi-x)=\sin x$이므로, 사인법칙에서 다음의 정확한 결과를 얻는다.

$$AC = \frac{a\sin(\theta+\phi)}{\sin\phi}, \qquad h = AC\sin\theta = \frac{a\sin\theta\,\sin(\theta+\phi)}{\sin\phi}.$$

? **생각해 보기** "h가 a에 비해 매우 크다"는 조건은 실제로 어디에서 쓰이는가?

이 조건은 ϕ가 작다는 것을 알려 준다. 정확한 공식을 정리하면 $\sin\phi = a\sin\theta\sin(\theta+\phi)/h \le a/h$이므로, $h \gg a$이면 $\sin\phi$가, 따라서 ϕ가 아주 작을 수밖에 없다. (아주 먼 C에서 보면 기선 AB가 만드는 각은 거의 없다.) 이제 $f=\sin$으로 두고 첫 번째 소문항의 결과를 쓰면

$$\sin(\theta+\phi) \approx \sin\theta + \phi\cos\theta \approx \sin\theta, \qquad \sin\phi \approx \sin 0 + \phi\cos 0 = \phi.$$

이다. 그러므로 구하는 대로

$$h \approx \frac{a\sin^2\theta}{\phi},$$

이고,

$$AC = \frac{h}{\sin\theta} \approx \frac{a\sin\theta}{\phi}.$$

이다. ($\phi\cos\theta$ 항을 남겨 두면 $AC \approx a\sin\theta/\phi + a\cos\theta$가 된다. 덧붙은 부분은 a 정도의 크기일 뿐이므로, h 정도의 크기인 거리에 비하면 무시할 수 있다.)

ϕ의 오차가 미치는 영향

θ는 정확히 측정되므로 고정하고, AC를 함수 $g(\phi) = a\sin\theta\,\phi^{-1}$로 보자. 첫 번째 소문항에 의해 오차 $\delta\phi$는 추정값을

$$\delta(AC) \approx g'(\phi)\,\delta\phi = -\frac{a\sin\theta}{\phi^2}\,\delta\phi.$$

만큼 바뀐다. 따라서 AC의 오차의 크기는 약 $\dfrac{a\sin\theta}{\phi^2}\,|\delta\phi|$이며, ϕ를 크게 측정하면 거리는 작게 추정된다.

> **생각해 보기** a를 두 배로 하면, 공식의 분자에 a가 있으니 오차도 두 배가 되지 않는가?

그렇지 않다. ϕ는 고정된 값이 아니라 기선에 따라 달라지기 때문이다. 점 C(따라서 h)는 그대로이고, $h \approx a\sin^2\theta/\phi$에서 $\phi \approx a\sin^2\theta/h$를 얻으므로 a를 두 배로 하면 ϕ도 대략 두 배가 된다. (C가 매우 멀리 있으므로 θ는 아주 조금만 변한다.) 오차를 고정된 양 h로 나타내면

$$\frac{a\sin\theta}{\phi^2}\,|\delta\phi| \approx a\sin\theta\cdot\frac{h^2}{a^2\sin^4\theta}\,|\delta\phi| = \frac{h^2}{a\sin^3\theta}\,|\delta\phi|.$$

이다. 같은 기기 오차 $\delta\phi$에 대해 AC의 오차는 a에 반비례한다. **두 망원경 사이의 거리를 두 배로 하면 오차는 대략 절반이 된다.**

검산

- $a = 1, \theta = \pi/6, \phi = 10^{-4}$로 두자. 정확한 공식으로는 $h \approx 2500.43$, $AC \approx 5000.87$이고, 근사식으로는 2500과 5000이다. AC의 차이는 약 $0.87 \approx a\cos\theta$로, 덧붙은 항이 예측하는 그대로이다.
- 무작위로 고른 수천 개의 a, θ와 작은 ϕ에 대해 두 시선의 교점으로 C를 직접 계산하면, 두 근사식 모두 0.1% 이내로 일치하고, 작은 $\delta\phi$로 인한 AC의 변화도 $-a\sin\theta\,\delta\phi/\phi^2$와 일치한다.
- 고정된 먼 점 C에 대해 기선이 a일 때와 $2a$일 때의 ϕ를 다시 계산하고 각각에 같은 $\delta\phi$만큼 섭동을 주면, 오차의 비는 2가 된다.
- 차원(dimension): 라디안(radian)으로 잰 각은 무차원이므로 $a\sin^2\theta/\phi$는 길이이다.

흔한 실수

- ϕ를 도(degree) 단위로 둔 채 $\sin\phi \approx \phi$를 쓰는 것. 이 근사는 sin의 f′와 마찬가지로 라디안이 필요하다.
- ϕ를 고정한 채 생각해서 오차가 a에 따라 두 배가 된다고 결론짓는 것. 대상이 고정하는 것은 ϕ가 아니라 h이다.
- $\angle ACB = \phi$임을 알아채지 못하고 좌표를 설정하는 것. 그래도 풀리지만 시간이 더 걸린다.

STEP 너머

이것은 시차(parallax)를 이용한 삼각측량(triangulation)으로, 천문학자들이 지구의 공전 궤도를 기선으로 삼아 가까운 별까지의 거리를 재는 방법이다. 오차 분석은 오차 전파(error propagation)를 처음 맛보는 것이다. 일차까지 보면, 측정값의 오차 δx는 그 값으로 계산한 모든 양에서 오차 $g'(x)\,\delta x$가 된다. 이 생각을 나머지항(remainder term)이 있는 테일러(Taylor) 정리로 엄밀하게 만드는 것은 대학 1학년 해석학(analysis)의 중심 내용이다. Abbott, *Understanding Analysis*(해석학의 이해)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.