풀이

STEP I 1992, 문제 4

순수수학 • 복소평면 위의 자취

> **STEP I 1992, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q4

핵심 아이디어

각 조건을 x와 y에 대한 명제($z = x + \mathrm{i}y$로 둔다)나 z의 절댓값(modulus)과 편각(argument)에 대한 명제로 바꾸면, 대개 영역이 한눈에 보인다. 소문항 (i)과 (ii)는 이것만으로 충분하다. 소문항 (iii)은 다르다. 이 소문항은 **합**들의 집합을 묘사하므로 두 가지를 보여야 한다. 모든 합이 우리가 주장하는 영역 안에 있다는 것, 그리고 그 영역의 모든 점이 실제로 그런 합이라는 것이다.

풀이

이 풀이 전체에서 $z = x + \mathrm{i}y$이고 x, y는 실수이다.

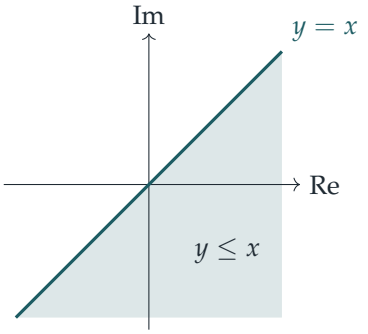
소문항 (i)

전개하면

$$(1+\mathrm{i})z = (1+\mathrm{i})(x+\mathrm{i}y) = (x-y) + \mathrm{i}(x+y),$$

이므로 $\mathrm{Re}((1+\mathrm{i})z) = x - y$이다. 조건은 $x - y \geq 0$, 즉 $y \leq x$이다. 이 집합은 직선 $y = x$ 위와 그 아래쪽으로 이루어진 닫힌 반평면(closed half-plane)이며, 직선 자신도 포함한다.

기하적으로, $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$를 곱하는 것은 $\frac{\pi}{4}$만큼 회전하고 $\sqrt{2}$배로 확대하는 것이다. 따라서 이 조건은 z를 시계 반대 방향으로 $\frac{\pi}{4}$만큼 회전시킨 점이 오른쪽 반평면 $\mathrm{Re} \geq 0$에 놓인다는 뜻이다. 이는 $-\frac{3\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}$(또는 $z = 0$)라는 뜻이고, 같은 반평면이다.



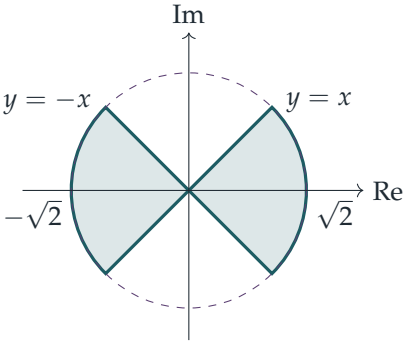
소문항 (ii)

$|z^2| = |z|^2$이므로 첫 번째 조건은 $|z|^2 \leq 2$, 즉 $|z| \leq \sqrt{2}$이다. 이는 원점을 중심으로 하고 반지름이 $\sqrt{2}$인 닫힌 원판(closed disc)이다.

두 번째 조건에 대해서는, $z^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$이므로 $\mathrm{Re}(z^2) = x^2 - y^2$이고, 조건은 $x^2 \geq y^2$, 즉 $|y| \leq |x|$이다. 이는 직선 $y = x$와 $y = -x$ 사이에 있으면서 실수축을 포함하는, 서로 마주 보는 한 쌍의 닫힌 부채꼴(sector)이다.

극형식(polar form)으로 쓰면 같은 내용을 더 빨리 얻는다. $z = re^{i\theta}$이면 $z^2 = r^2e^{2i\theta}$이므로 $r \leq \sqrt{2}$이고 $\cos 2\theta \geq 0$이어야 하며, 이로부터 $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}$(또는 $z = 0$)를 얻는다.

구하는 집합은 이 둘의 교집합이다. 즉 두 개의 닫힌 사분원판(각각 중심각이 $\frac{\pi}{2}$이고 반지름이 $\sqrt{2}$인 부채꼴)으로, 하나는 오른쪽으로, 다른 하나는 왼쪽으로 열려 있고 원점에서 만난다. 경계는 모두 포함된다.



소문항 (iii)

합들의 집합을 S라 하자. S가 닫힌 원환(closed annulus) $\{z : 1 \leq |z| \leq 3\}$임을 보이겠다.

모든 합은 원환 안에 있다. $|z_1| = 2$이고 $|z_2| = 1$이면 삼각부등식(triangle inequality)에 의

해

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2| = 3, \qquad |z_1 + z_2| \ge |z_1| - |z_2| = 1.$$

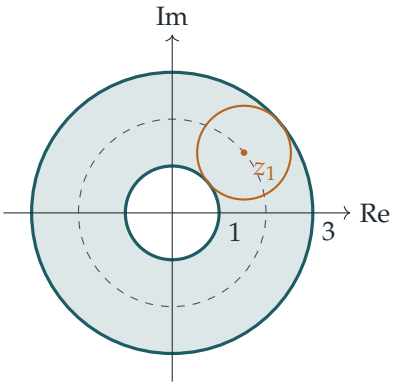
생각해 보기 이것으로 충분한가? 원환 안의 어떤 곡선만이 아니라 원환 전체가 채워진다는 것을 어떻게 알 수 있는가?

이 부등식들은 S가 원환 안에 있다는 것만 보여 주므로, 반대 방향의 포함 관계를 여전히 보여야 한다. $1 \le |z| \le 3$인 임의의 z를 잡자. $|z - z_2| = 2$인 절댓값 1의 복소수 z_2를 찾고 싶다. 그러면 $z_1 = z - z_2$의 절댓값은 2이고 $z = z_1 + z_2$이기 때문이다.

기하적으로, z_2는 0을 중심으로 하는 단위원 위에 있으면서 동시에 z를 중심으로 하고 반지름이 2인 원 위에 있어야 한다. 반지름이 1과 2이고 중심 사이의 거리가 $d = |z|$인 두 원은 정확히 $2 - 1 \le d \le 2 + 1$일 때 만나며, 이것이 바로 우리의 조건 $1 \le |z| \le 3$이다.

원에 관한 이 사실을 인용하지 않고 확인하려면, $z = re^{i\alpha}$로 쓰고 φ에 대해 연속인 함수 $f(\varphi) = |z - e^{i\varphi}|$를 생각하자. $\varphi = \alpha$일 때 점 $e^{i\varphi}$는 z와 같은 방향을 가리키므로 $f(\alpha) = |r - 1| = r - 1 \le 2$이다. $\varphi = \alpha + \pi$일 때는 반대 방향을 가리키므로 $f(\alpha + \pi) = r + 1 \ge 2$이다. 사잇값 정리(intermediate value theorem)에 의해 어떤 φ에 대해 $f(\varphi) = 2$이고, $z_2 = e^{i\varphi}$가 조건을 만족한다.

따라서 S는 정확히 두 원 $|z| = 1$과 $|z| = 3$ 사이의 닫힌 원환이며, 두 경계원을 모두 포함한다. 이렇게 그려 보면 좋다. 반지름이 2인 원 위에 z_1을 고정하면, $z_1 + z_2$는 z_1을 중심으로 하는 단위원을 그린다. z_1이 한 바퀴 돌면 이 작은 원들이 원환 전체를 쓸고 지나간다.



호박색 원은 점선 원 $|z_1| = 2$ 위의 고정된 한 z_1에 대한 합들을 나타낸다.

검산

▶ (i)에서 $z = 1$이면 $\mathrm{Re}(1 + i) = 1 \ge 0$이고, $z = i$이면 $\mathrm{Re}(-1 + i) = -1 < 0$이다. 이는 $y \le x$와 일치한다.

- (ii)에서 $z = 1$은 집합에 속하고 $z = \mathrm{i}$는 속하지 않으므로($\mathrm{i}^2 = -1$), 그림처럼 부채꼴들은 실수축을 포함해야 한다.
- (iii)에서 $z_1 = 2, z_2 = -1$이면 1이 되고 $z_1 = 2, z_2 = 1$이면 3이 되므로, 두 경계원에 모두 도달한다. 세 가지 묘사를 모두 무작위로 고른 200 000개의 점에서 시험해 보았다. 무작위 합들의 절댓값은 1.0000과 3.0000 사이에 있었고, 원환의 무작위 점 1000개에 대해 알맞은 z_2를 2×10^{-4} 이내의 오차로 찾을 수 있었다.

흔한 실수

- (ii)에서 부채꼴 $|\arg z| \leq \frac{\pi}{4}$만 남기고 왼쪽 부채꼴을 잊는 것. z와 $-z$는 제곱이 같다.
- (iii)에서 삼각부등식까지만 하고 멈추는 것. 그것은 S가 원환 안에 있다는 것만 보여 줄 뿐, S가 원환 전체라는 것은 보여 주지 않는다.
- 경계가 포함되는지 여부를 빠뜨리는 것. 여기서 모든 부등식은 등호를 포함하므로 모든 경계가 포함된다.

STEP 너머

소문항 (iii)은 두 집합의 **민코프스키 합**(Minkowski sum) $A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$의 작은 예로, 이 개념은 기하학과 볼록 해석학(convex analysis) 전반에 걸쳐 등장한다. 두 방향의 포함 관계를 보이는 논법($S \subseteq T$를 보이고 이어서 $T \subseteq S$를 보이는 것)은 두 집합이 같음을 증명하는 표준적인 방법이며, 대학에서 끊임없이 쓰게 될 것이다. 복소수의 곱셈을 회전과 확대로 보는 기하적 관점을 알고 싶다면 Needham, *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)를 보라. 이 관점을 쓰면 (i)과 (ii)는 거의 즉시 풀린다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.