풀이

STEP I 1992, 문제 3

순수수학 • 홀함수와 짝함수

STEP I 1992, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/92-s1-q3

핵심 아이디어

여기 나오는 모든 적분은 대칭 구간(symmetric interval) $[-\pi, \pi]$에서의 적분이므로, 각 피적분함수(integrand)에 대해 가장 먼저 물어야 할 것은 그것이 우함수(even function)인지 기함수(odd function)인지이다. 기함수를 대칭 구간에서 적분하면 0이 되고, 우함수를 적분하면 $[0, \pi]$에서의 적분의 두 배가 되는데, 이 구간에서는 절댓값(modulus) 기호가 사라진다. 대칭성을 알아차리면 네 소문항 모두 기껏해야 짧은 계산 하나씩으로 끝난다.

풀이

두 가지 표준적인 사실을 이용한다. $f(-x) = f(x)$(우함수)이면

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

이고, $f(-x) = -f(x)$(기함수)이면 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$이다. 두 사실 모두 $[-a, 0]$에서의 적분에 $x = -u$를 치환(substitution)하면 얻어지는데, 이 치환으로 그 적분은 $\int_{0}^{a} f(-u)\,\mathrm{d}u$가 된다.

또한 $\int_{0}^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = [-\cos x]_{0}^{\pi} = 1 - (-1) = 2$도 필요하다.

소문항 (i)

$|\sin(-x)| = |-\sin x| = |\sin x|$이므로 피적분함수는 우함수이다. $[0, \pi]$에서는 $\sin x \geq 0$이므로 그 구간에서 $|\sin x| = \sin x$이다. 따라서

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 2 \times 2 = 4.$$

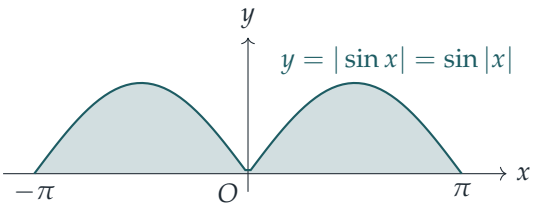
소문항 (ii)

$|-x| = |x|$이므로 함수 $\sin|x|$는 우함수이다. $[0, \pi]$에서 $|x| = x$이므로

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin|x|\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 4.$$

? **생각해 보기** (i)과 (ii)의 답이 같은 것은 우연일까?

그렇지 않다. 이 구간에서 두 피적분함수는 같은 함수이다. $0 \le x \le \pi$에서는 둘 다 $\sin x$와 같다. $-\pi \le x \le 0$에서는 $\sin x \le 0$이므로 $|\sin x| = -\sin x$이고, $\sin|x| = \sin(-x) = -\sin x$ 역시 성립한다. 두 곡선은 $[-\pi, \pi]$ 밖에서만 갈라진다. 예를 들어 $x = 3\pi/2$에서 $|\sin x| = 1$이지만 $\sin|x| = -1$이다.



색칠한 영역은 사인 곡선의 아치 두 개로 이루어져 있고, 각 아치의 넓이는 2이다.

소문항 (iii)

여기서는 $(-x)\sin(-x) = (-x)(-\sin x) = x\sin x$이므로 피적분함수는 우함수이다(두 기함수의 곱). 그러므로

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x.$$

$u = x$, $\mathrm{d}v = \sin x\,\mathrm{d}x$(따라서 $v = -\cos x$)로 두고 부분적분(integration by parts)하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x &= [-x\cos x]_0^{\pi} + \int_{0}^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x \\ &= (-\pi\cos\pi - 0) + [\sin x]_0^{\pi} \\ &= \pi + 0 = \pi.\end{aligned}$$

따라서

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x = 2\pi.$$

소문항 (iv)

이번에는 $(-x)^{10}\sin(-x) = x^{10}(-\sin x) = -x^{10}\sin x$이므로 피적분함수는 기함수이다(우함수와 기함수의 곱). 그러므로 대칭 구간에서의 적분은

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^{10}\sin x\,\mathrm{d}x = 0.$$

부분적분을 열 번 할 필요가 없다! $[-\pi, 0]$과 $[0, \pi]$에서의 기여는 크기가 같고 부호가 반대여서 정확히 상쇄된다.

검산

- 넓이 감각: (i)에서 피적분함수는 음이 아니고 1 이하이므로 답은 0과 $2\pi \approx 6.28$ 사이에 있어야 하는데, 4는 그렇다.
- (iii)에서 $[-\pi, \pi]$ 위에서 $x\sin x \geq 0$이므로 답은 양수여야 하는데, 2π는 양수이다. $\sin x - x\cos x$를 미분하면 $x\sin x$가 되므로 원시함수(antiderivative)가 맞음을 확인할 수 있다.
- 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 구간을 20 000개로 나누어 계산하면 네 적분의 값은 4.0000000, 4.0000000, 6.2831853, 0.0000000이다. (iv)에서 0은 단지 작은 수가 아니다. 같은 구간에서 $|x^{10}\sin x|$의 적분은 약 13 275이므로, 상쇄는 정확하고 완전하다.

흔한 실수

- 절댓값을 무시하고 $\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x = \left[-\cos x\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$이라고 쓰는 것. 결코 음이 되지 않는 피적분함수는 거의 모든 곳(almost everywhere)에서 0이 아닌 한 적분값이 0일 수 없다.
- $\sin x$가 기함수이므로 $\sin|x|$도 기함수라고 가정하는 것. $|x|$와 합성(composition)하면 언제나 우함수가 된다.
- (iii)의 부분적분에서 부호를 틀리는 것. $\cos\pi = -1$이므로 $-\pi\cos\pi = +\pi$임을 기억하자.

STEP 너머

함수를 우함수 부분과 기함수 부분으로 나누는 것, 즉 $f(x) = \frac{1}{2}\big(f(x)+f(-x)\big) + \frac{1}{2}\big(f(x)-f(-x)\big)$는 푸리에 급수(Fourier series)의 출발점이다. $[-\pi, \pi]$에서 우함수 부분은 코사인으로, 기함수 부분은 사인으로 전개되며, (iii)과 (iv) 같은 적분이 바로 계수(coefficient)를

계산하는 데 쓰이는 적분이다. 예를 들어 x의 푸리에 급수에서 $\sin x$의 계수는 (iii)의 적분에서 나온다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에는 푸리에 급수와 그것을 미분방정식 풀이에 활용하는 방법에 대한 읽기 쉬운 입문이 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.