풀이

STEP I 1992, 문제 2

순수수학 • 마방진과 경우의 수

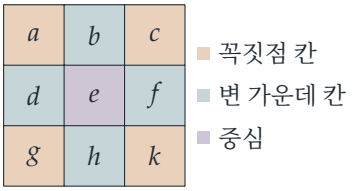
> **STEP I 1992, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q2

핵심 아이디어

모든 것은 선들을 영리하게 더하는 데서 나온다. 세 행을 모두 더하면 각 수를 정확히 한 번씩 쓰게 되므로 n이 나온다. 중심을 지나는 네 선을 더하면 모든 수를 한 번씩, 중심은 네 번 쓰게 되므로 e가 결정된다. 그다음에는 문제가 작고 꼼꼼한 경우 분석(case analysis)이 된다. e를 알고 나면 중심을 지나는 각 선은 합이 일정한 두 수를 짝짓게 되고, 그 때문에 큰 수가 들어갈 자리가 거의 남지 않는다. 그런 다음 정사각형의 대칭(symmetry), 즉 회전이 세는 일을 대신해 준다.

풀이

세 종류의 칸에 이름을 붙이면 편리하다. 네 개의 **꼭짓점 칸**(corner) a, c, g, k, 네 개의 **변 가운데 칸**(edge-middle) b, d, f, h, 그리고 **중심**(centre) e이다.



소문항 (i)

세 행을 합치면 아홉 개의 수가 각각 정확히 한 번씩 들어 있다. 따라서 세 행의 합을 더하면

$$3n = (a+b+c) + (d+e+f) + (g+h+k) = 1 + 2 + \cdots + 9 = 45,$$

이므로 $n = 15$이다.

소문항 (ii)

중심을 지나는 선은 가운데 행, 가운데 열, 그리고 두 대각선(diagonal)의 네 개이다. 이들을 더하면

$$(d+e+f)+(b+e+h)+(a+e+k)+(c+e+g)=4n=60.$$

좌변에서 e를 제외한 모든 수는 정확히 한 번씩 나타나고 e는 네 번 나타나므로, 좌변은 $45+3e$이다. 따라서 $45+3e=60$이고, $e=5$이다.

여기서 유용한 결론을 하나 얻는다. 중심을 지나는 각 선의 합이 15이고 $e=5$이므로, 중심을 사이에 두고 서로 **마주 보는** 두 칸의 합은 항상 10이다.

$$a+k=c+g=b+h=d+f=10.$$

소문항 (iii)

$e=5$이므로 9는 중심에 올 수 없다. 따라서 9가 꼭짓점 칸에 올 수 없음을 보이면 된다.

모순을 이끌어 내기 위해(for contradiction) 9가 꼭짓점 칸에 있다고 가정하자. 논증은 어느 꼭짓점 칸에서나 같으므로 $a=9$라 하자. 그러면 마주 보는 꼭짓점 칸은 $k=10-9=1$이다. 맨 위 행과 왼쪽 열이 모두 a를 지나므로

$$b+c=15-9=6 \qquad \text{그리고} \qquad d+g=15-9=6.$$

네 수 b,c,d,g는 서로 다르며, 1, 5, 9를 쓰고 남은 수, 즉 $\{2,3,4,6,7,8\}$에서 골라야 한다. 이 집합에서 **서로 다른** 두 수의 합으로 6을 나타내는 방법은 $2+4$뿐이다($1+5$는 이미 놓인 수를 쓰고, $3+3$은 같은 수를 반복하기 때문이다). 따라서 $\{b,c\}=\{2,4\}$이고 $\{d,g\}=\{2,4\}$인데, 이렇게 되려면 2와 4를 각각 두 번씩 써야 한다. 이는 모든 수가 서로 다르다는 조건에 모순이다.

? **생각해 보기** 왜 꼭짓점 칸 a 하나만 다루어도 충분할까?

어느 꼭짓점 칸에 대해서도 같은 세 가지 사실이 성립한다. 마주 보는 꼭짓점 칸은 1이어야 하고, 그 꼭짓점 칸을 지나며 정사각형의 변을 따라가는 두 선은 각각 나머지 두 수의 합이 6이어야 한다. 따라서 같은 모순이 나타난다. (같은 말이지만, 마방진(magic square)을 4분의 1 바퀴 회전하면 또 다른 마방진이 되고, 회전은 a를 나머지 각 꼭짓점 칸으로 옮긴다.)

따라서 9는 중심도 꼭짓점 칸도 아니므로, b,d,f,h 중 하나여야 한다.

소문항 (iv)

$b=9$라 하자. 그러면 $h=10-9=1$이고, 맨 위 행에서 $a+c=6$이다. (iii)에서처럼 쓰지 않은 수는 $\{2,3,4,6,7,8\}$이고, 이 중 합이 6인 서로 다른 두 수의 쌍은 $\{2,4\}$뿐이다. 따라서 $a=2,\ c=4$이거나 $a=4,\ c=2$이다.

a와 c가 정해지면 나머지는 모두 마주 보는 쌍과 양옆의 열에 의해 결정된다.

- $a = 2, c = 4$: 이때 $k = 10 - a = 8, g = 10 - c = 6, d = 15 - a - g = 7, f = 15 - c - k = 3$이다.
- $a = 4, c = 2$: 이때 $k = 6, g = 8, d = 15 - 4 - 8 = 3, f = 15 - 2 - 6 = 7$이다.

값이 강제된다는 것은 이들이 **유일한** 후보라는 사실만 보여 줄 뿐이므로, 실제로 조건을 만족하는지 확인해야 한다. 각 경우 수 $1, \ldots, 9$가 한 번씩 쓰였고, 모든 행, 열, 대각선의 합이 15이다.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

4	9	2
3	5	7
8	1	6

(예를 들어 첫 번째에서 행의 합은 15, 15, 15, 열의 합은 $2+7+6, 9+5+1, 4+3+8$, 대각선의 합은 $2+5+8, 4+5+6$이다.) 따라서 $b = 9$인 마방진은 정확히 두 개이고, 두 번째는 첫 번째를 가운데 열에 대해 대칭시킨 거울상이다.

소문항 (v)

마방진을 시계 방향으로 4분의 1 바퀴 돌리면 또 다른 마방진이 된다. 새 마방진의 행은 원래의 열이고, 열은 원래의 행(거꾸로 읽은 것)이며, 두 대각선은 서로 바뀐다. 4분의 1 바퀴 회전은 되돌릴 수 있으므로(반시계 방향으로 다시 돌리면 된다), 이 회전은 마방진들 사이의 일대일대응(one-to-one correspondence)을 준다.

시계 방향 4분의 1 바퀴 회전은 칸 b를 칸 f로 옮긴다. 따라서 $f = 9$인 마방진은 정확히 $b = 9$인 마방진을 4분의 1 바퀴 돌린 것들이며, 정확히 2개 있다. 다시 돌리면 $h = 9$인 것도 정확히 2개, $d = 9$인 것도 정확히 2개이다.

(iii)에 의해 모든 마방진은 b, f, h, d 중 정확히 한 자리에 9를 가지므로, 이 네 묶음은 서로소이고 모든 경우를 빠짐없이 덮는다. 따라서

$$4 \times 2 = 8$$

개의 서로 다른 3×3 마방진이 있다. 이들은 (iv)의 두 마방진과, 그것들을 4분의 1, 반, 4분의 3 바퀴 돌린 것들이다. 같은 말로, 하나의 마방진에 대한 여덟 가지 회전과 반사(reflection)이다.

검산

$1, \ldots, 9$의 모든 $9! = 362\,880$가지 배열을 컴퓨터로 간단히 탐색하면 마방진은 정확히 8개 나온다. 모두 선의 합이 15이고 중심이 5이며, 모두 변 가운데 칸에 9가 있고, $b = 9$인 두

개는 (iv)에서 찾은 마방진이다. 손으로는 모든 마방진에서 1이 9의 맞은편에 있고 짝수 $2, 4, 6, 8$이 꼭짓점 칸을 채운다는 것을 확인할 수 있다.

흔한 실수

- (iv)에서 강제로 얻은 정사각형이 정말 마방진인지 확인하는 것을 잊는 실수. 이 추론은 다른 것은 될 수 없다는 사실만 보여 준다.
- (v)에서 회전이 왜 새롭고 실제로 서로 다른 정사각형을 만드는지 설명하지 않거나, (iii)을 이용해 네 경우가 겹치지 않고 모든 경우를 덮는다는 것을 보이지 않은 채 "2"나 "4"라고 답하는 실수.

STEP 너머

소문항 (v)는 **군의 작용**(group action)을 처음 맛보는 것이다. 정사각형의 여덟 가지 대칭(네 개의 회전과 네 개의 반사)은 군(group)을 이루고, 마방진들은 이 군 아래에서 하나의 궤도(orbit)를 이룬다. 이처럼 대칭을 고려하여 대상을 세는 방법은 번사이드 보조정리(Burnside's lemma)로 발전하는데, 이는 군론의 첫 강의에서 만나게 된다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 시작하기에 친절한 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.