풀이

STEP I 1992, 문제 16

확률과 통계 • 네트워크 신뢰도

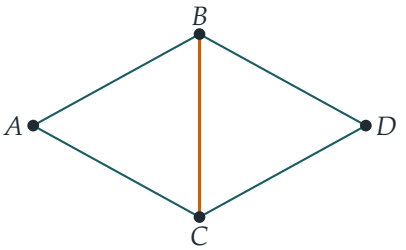
STEP I 1992, 16번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/92-s1-q16

핵심 아이디어

이 도로망은 하나의 "다리(bridge)" 구조이다. A에서 D로 가는 두 경로가 있는데, 하나는 B를 거치고 다른 하나는 C를 거치며, 도로 CB가 그 가운데에서 두 경로를 잇는다. 이 다리 구조를 다루는 가장 깔끔한 방법은 CB가 열려 있는지 아닌지에 따라 조건을 나누는 것(conditioning)이다. 그것만 알고 나면 모든 것이 직렬(series)과 병렬(parallel)로 연결된 도로 문제로 바뀌기 때문이다. 어떤 도로에 제설 대책을 세우는 것은 그 도로의 두 끝을 하나의 마을로 합치는 것과 같은 효과를 낸다. 따라서 두 제안을 비교하려면 각 제안이 만들어 내는 더 작은 도로망을 살펴보면 된다.



풀이

풀이 전체에서 어떤 도로가 열려 있을 확률(probability)을 $q = 1 - p$로 쓴다. 각 도로는 독립적으로(independently) 막히므로, 열린 도로와 막힌 도로의 특정한 배치가 일어날 확률은 p와 q들의 곱이다. 같은 마을을 다시 지나지 않는 A에서 D로의 경로는 다음 네 가지이다.

$$ABD, \qquad ACD, \qquad ABCD, \qquad ACBD.$$

열린 경로가 $ABCD$뿐인 경우

$ABCD$가 열려 있으려면 AB, BC, CD가 모두 열려 있어야 한다. 이것이 **유일한** 열린 경로이려면 ABD가 막혀 있어야 하는데, AB가 열려 있으므로 BD가 막혀 있어야 한다. 마찬가지로 ACD가 막혀 있어야 하고, CD가 열려 있으므로 AC가 막혀 있어야 한다. 그러면 $ACBD$도 저절로 막힌다(AC와 BD를 모두 쓰기 때문이다).

따라서 이 사건은 정확히 "AB, BC, CD는 열려 있고 AC, BD는 막혀 있다"는 사건이다. 독립성에 의해 그 확률은

$$q^3p^2 = p^2(1-p)^3,$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

현재 상태에서 통행할 수 있을 확률

A와 D가 막히지 않은 도로로 이어져 있는 사건을 E라 하고, 도로 CB에 대해 조건을 나눈다.

CB가 열려 있으면, B와 C는 하나의 마을처럼 행동한다. AB와 AC가 둘 다 막히지 않는 한 A에서 그 마을로 갈 수 있고, BD와 CD가 둘 다 막히지 않는 한 그 마을에서 D로 갈 수 있다. 이 두 조건은 서로 다른 도로에 관한 것이므로

$$\mathrm{P}(E \mid CB \text{ 열림}) = (1-p^2)^2.$$

CB가 막혀 있으면, 가능한 경로는 ABD와 ACD뿐이다. 각각 확률 q^2로 열려 있고, 공유하는 도로가 없으므로 서로 독립이다. 따라서

$$\mathrm{P}(E \mid CB \text{ 막힘}) = 1-(1-q^2)^2.$$

A가 D로부터 단절될 확률을 다루는 편이 더 쉽다. $1-(1-p^2)^2 = p^2(2-p^2)$이고 $1-q^2 = p(2-p)$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\text{단절}) &= q\,p^2(2-p^2) + p\cdot p^2(2-p)^2 \\ &= p^2[(1-p)(2-p^2) + p(4-4p+p^2)] \\ &= p^2\,(2+2p-5p^2+2p^3).\end{aligned}$$

어느 도로에 제설 대책을 세울 것인가

CB에 제설 대책을 세우는 경우. 이제 CB는 항상 열려 있으므로, 언제나 위의 첫 번째 경우에 해당한다.

$$\mathrm{P}(\text{단절}) = 1-(1-p^2)^2 = 2p^2-p^4.$$

AB에 제설 대책을 세우는 경우. 이제 A와 B는 하나의 마을처럼 행동하며, BD가 막혀 있고 동시에 C를 거쳐 가는 길도 없을 때에만 D로부터 단절된다. C를 거쳐 가려면 CD가 열려 있

고 AC, CB 중 적어도 하나가 열려 있어야 하므로, 이 길이 막힐 확률은 $p + q\,p^2$이다. 따라서

$$\mathrm{P}(\text{단절}) = p\,(p + qp^2) = p^2 + p^3 - p^4.$$

> **생각해 보기** 두 답 모두 p^2 항으로 시작한다. 모든 p에 대해 어느 쪽이 더 작은지 어떻게 판단할까?

두 식을 빼 보자.

$$(2p^2 - p^4) - (p^2 + p^3 - p^4) = p^2 - p^3 = p^2(1-p) > 0 \quad \text{단, } 0 < p < 1.$$

따라서 p의 값이 무엇이든, AB에 제설 대책을 세우는 쪽이 항상 단절될 확률을 더 작게 만든다. 정부는 AB를 골라야 하며, 두 선택이 똑같이 좋은 경우는 없다.

이는 직관과도 맞는다. CB를 보강하는 것은 그 도로가 우회로의 일부로 필요할 때에만 도움이 된다. 반면 AB를 보강하면 A와 B가 하나의 마을이 되고, 이 마을은 직통 도로 BD와 C를 거치는 길, 두 가지로 D와 이어진다.

마지막 소문항

$p = \frac{1}{10}$일 때, 현재 단절될 확률은

$$\frac{1}{100}\left(2 + \frac{2}{10} - \frac{5}{100} + \frac{2}{1000}\right) = \frac{1}{100} \times 2.152 = 0.02152.$$

이 값은 $\frac{1}{100}$보다 크므로 정부는 계획을 실행할 것이다(그리고 앞 소문항에 의해 AB에 제설 대책을 세울 것이다).

주요 항 $2p^2 = 0.02$만으로도 결론이 난다. 단 두 도로가 막혀서 단절되는 경우가 두 가지, 즉 $\{AB, AC\}$와 $\{BD, CD\}$ 있기 때문이다.

검산

- $p \to 0$일 때 단절될 확률은 약 $2p^2$인데, 이는 막히면 A나 D를 고립시키는 도로 쌍 두 개를 센 것이다. AB에 제설 대책을 세우면 쌍 $\{BD, CD\}$만 남아 약 p^2가 되며, 이는 우리 공식과 일치한다. CB에 제설 대책을 세우면 두 쌍이 모두 남아 약 $2p^2$가 된다.
- $p = 1$일 때 현재 상태의 공식은 $1 \cdot (2 + 2 - 5 + 2) = 1$을 준다. 모든 도로가 막히면 반드시 단절된다.
- 열린 도로와 막힌 도로의 2^5가지 배치를 모두 열거(enumeration)하여 정확히 계산하면, 여러 p값에 대해 위의 모든 공식이 확인된다. $p = \frac{1}{10}$일 때 현재 상태는 0.02152, AB에 제설 대책을 세운 후에는 0.0109, CB에 제설 대책을 세운 후에는 0.0199이다. 2×10^5번의 겨울을 시뮬레이션(simulation)한 결과는 0.0215였다.

흔한 실수

- 네 경로가 열려 있을 확률을 더하는 것. 경로들이 도로를 공유하므로 이 사건들은 서로 겹치고, 합은 중복해서 센다.
- 첫 번째 소문항에서 "유일한 열린 경로"라는 조건 때문에 AC와 BD가 막혀 있어야 한다는 점을 잊고 $(1-p)^3$만 답하는 것.
- 두 제안을 $p = \frac{1}{10}$에서만 비교하는 것. 차 $p^2(1-p)$를 보면 모든 p에 대해 AB가 더 낫다는 것을 알 수 있다.

STEP 너머

이것은 **네트워크 신뢰도**(*network reliability*)의 작은 예이며, 한 변에 대해 조건을 나누는(또는 그 양 끝을 합치는) 기법은 그래프 이론(graph theory) 전반에 걸쳐 나타나는 삭제–축약(deletion–contraction) 아이디어이다. 큰 무작위 네트워크에서는 같은 질문이 **스미기 이론**(*percolation theory*)으로 이어지는데, 여기에는 장거리 연결이 갑자기 사라지는 뚜렷한 p의 임계값이 존재한다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 여기서 사용한 조건부 확률 도구를 익히기에 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.