풀이

STEP I 1992, 문제 13

역학 • 탈출 속력과 지름 방향 낙하

STEP I 1992, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

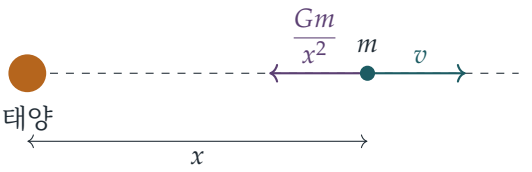
step.maths.org/questions/92-s1-q13

핵심 아이디어

힘이 거리 x에만 의존하므로, 운동 방정식(equation of motion)을 $v\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ 꼴로 쓰는 것이 자연스러운 도구이다. 이렇게 쓰면 곧바로 적분되어 속력과 거리를 잇는 에너지 방정식(energy equation)이 나온다. 첫 번째 부분에서는 v^2이 결코 음수가 될 수 없다는 사실 때문에 이 방정식이 x의 상한이 된다. 두 번째 부분에서는 에너지 방정식이 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$를 x의 함수로 주고, 변수 분리(separating the variables)를 하면 시간이 구해진다.

풀이

태양은 고정되어 있고 혜성은 질점(particle)이며, 주어진 인력 외에는 아무 힘도 작용하지 않는다고 모형화한다. 인력은 혜성과 태양을 잇는 직선을 따라 작용하므로, 태양으로부터 곧장 멀어지고 있는(또는 정지해 있는) 혜성은 계속 그 직선을 따라 움직인다. 따라서 x는 한 직선 위의 좌표이고, $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$로 두며 v가 양수이면 태양에서 멀어지는 방향을 뜻하도록 한다.



에너지 방정식

힘이 태양 쪽(x가 감소하는 방향)을 향하므로, 직선을 따라 뉴턴(Newton)의 제2법칙(second law)을 적용하면

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{Gm}{x^2}.$$

가속도를 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$로 쓰고 m을 약분하면

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{G}{x^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \tfrac{1}{2}v^2 = \frac{G}{x} + C$$

이다. 여기서 C는 어떤 상수이다. 이 식은 혜성이 어느 쪽으로 움직이든 운동 내내 성립한다. (이것은 단위 질량당 에너지 보존(conservation of energy)이다. 운동 에너지(kinetic energy) $\frac{1}{2}v^2$과 퍼텐셜 에너지(potential energy) $-G/x$의 합이 보존된다.)

x가 한없이 커질 조건

주어진 순간에 $x = h, v = V$이므로 $C = \frac{1}{2}V^2 - \frac{G}{h}$이고, 그 이후의 모든 시각에서

$$v^2 = V^2 - \frac{2G}{h} + \frac{2G}{x}.$$

대우(contrapositive)를 증명한다. 즉 $V^2 < 2G/h$이면 x가 유계임을 보인다.

> ? **생각해 보기** 혜성은 원리적으로 나중에 온갖 방식으로 움직일 수 있다. 방정식 하나로 어떻게 모든 시각의 x를 제한할 수 있을까?

혜성이 무엇을 하든 매 순간 $v^2 \geq 0$이기 때문이다. $V^2 < 2G/h$라 하고 $k = \frac{2G}{h} - V^2 > 0$으로 두자. 그러면 에너지 방정식에 의해

$$\frac{2G}{x} = v^2 + k \;\geq\; k, \qquad \text{따라서} \qquad x \leq \frac{2G}{k} = \frac{2Gh}{2G - hV^2}$$

가 이후의 모든 시각에서 성립한다($x > 0, k > 0$이므로 양변에 곱해도 된다). 그러므로 x는 고정된 값 $2Gh/(2G - hV^2)$을 결코 넘을 수 없다. 혜성은 $v = 0$이 되는 그 거리까지 올라간 뒤 다시 떨어진다. 따라서 $V^2 \geq 2G/h$가 아니면 x는 한없이 커질 수 없으며, 이것이 보이려던 것이다.

(역(converse)도 참이다. $V^2 \geq 2G/h$이면 혜성이 바깥쪽으로 움직이는 동안 $v^2 \geq 2G/x > 0$이므로 혜성은 결코 멈추지 않는다. 또 $x \leq X$일 때마다 $v^2 \geq 2G/x \geq 2G/X$이므로, 어떤 거리 X 아래에 영원히 머물 수도 없다. 이것이 탈출 속도(escape speed)이다.)

태양으로 떨어지는 데 걸리는 시간

이제 혜성이 아주 먼 거리 D에서 정지 상태로 출발한다. 정지 상태에서 놓이면 혜성은 태양을 향해 곧장 떨어진다. $x = D$에서 $v = 0$이라는 조건을 에너지 방정식에 넣으면

$$\tfrac{1}{2}v^2 = \frac{G}{x} - \frac{G}{D}.$$

생각해 보기 "아주 먼 거리"는 상수에 대해 무엇을 뜻할까?

$D \to \infty$로 보낸다는 뜻이다. 그러면 $G/D \to 0$이 되어 상수는 0이다. 즉 혜성의 총에너지는 0이다. (크지만 유한한 D를 쓰면 혜성이 조금 더 느려지고 시간이 조금 더 길어질 뿐이며, 그 차이는 $D \to \infty$일 때 0으로 수렴한다.) 따라서 거리 x에서 혜성의 속력은 $\sqrt{2G/x}$이고, x가 감소하므로

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{\frac{2G}{x}} \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = -\sqrt{2G}\,\mathrm{d}t.$$

$x = h$에서 $x = 0$까지 가는 데 걸리는 시간을 T라 하자. 적분하면

$$\sqrt{2G}\,T = \int_0^h \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \tfrac{2}{3}h^{3/2},$$

이므로

$$T = \frac{2h^{3/2}}{3\sqrt{2G}} = \frac{h}{3}\sqrt{\frac{2h}{G}}.$$

(피적분함수 $\sqrt{x}$는 $x = 0$에서 아무 문제 없이 잘 정의되므로, 속력이 한없이 커지더라도 혜성은 실제로 유한한 시간 안에 태양에 도달한다.)

검산

- 단위: 힘 Gm/x^2은 질량 곱하기 가속도이므로 G의 단위는 $\mathrm{m}^3\,\mathrm{s}^{-2}$이다. 그러면 V^2과 $2G/h$는 둘 다 $\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}^{-2}$ 단위이고, $h^{3/2}/\sqrt{G}$는 초 단위이다.
- $x = h$에서 혜성의 속력은 $\sqrt{2G/h}$이다. 그 속력을 계속 유지한다면 $h/\sqrt{2G/h} = \frac{h}{2}\sqrt{2h/G}$만큼 걸릴 것이고, 이는 T보다 길다. 혜성은 점점 빨라지므로 당연히 그래야 한다. 실제로 T는 이 값의 3분의 2이다.
- 수치 검산, $G = h = 1$일 때: $x = 1$, $v = \sqrt{1.5}$에서 운동을 단계적으로 진행시키면 혜성은 $x = 4.000$에서 방향을 바꾸며, 이는 $2Gh/(2G - hV^2) = 4$의 예측과 같다. $x = 1$, $v = -\sqrt{2}$에서 출발하면 0.4714 뒤에 태양에 도달하며, 이는 $T = \frac{1}{3}\sqrt{2} \approx 0.47140$과 일치한다. 무한대 대신 $D = 10^6$에서 정지 상태로 출발해도 T는 소수점 일곱째 자리에서만 달라진다.

흔한 실수

- $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{2G/x}$의 음의 부호를 빠뜨려 음수 시간을 얻거나, 이유를 말하지 않고 0부터 h까지 적분하는 것.
- 혜성이 느려진다는 것만 보이는 것: 멀어지는 혜성은 탈출하는 것이라도 모두 느려진다. 핵심은 $V^2 < 2G/h$일 때 어떤 거리를 넘어서면 v^2이 음수가 되어 버린다는 점이다.

STEP 너머

양 $\frac{1}{2}v^2 - G/x$는 뉴턴 중력장에서의 단위 질량당 에너지이며, 그 부호가 속박 궤도(bound orbit, 타원(ellipse))인지 탈출(포물선(parabola)과 쌍곡선(hyperbola))인지를 결정한다. 마지막 부분의 에너지가 0인 낙하는 포물선 궤도의 퇴화된 직선 경우이며, $T \propto h^{3/2}$는 케플러(Kepler) 제3법칙의 친척이다. 대학 1학년 궤도 역학 강의에서는 이 모든 것을 같은 에너지 방정식과 각운동량(angular momentum) 방정식에서 전개한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 중심력(central force)과 궤도를 철저히 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.