풀이

STEP I 1992, 문제 12

역학 • 마찰이 있는 정역학

> **STEP I 1992, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q12

핵심 아이디어

두 사다리는 가볍기 때문에, 그중 하나에 대해 쓸모 있는 식을 얻는 유일한 방법은 경첩(hinge) A에 대한 모멘트(moment)를 구하는 것이다. 그렇게 하면 다른 사다리가 가하는 미지의 힘과 A에 걸린 짐의 힘이 식에서 사라진다. 두 발은 서로 벌어지며 미끄러지려 하고, 이 바깥쪽으로 미는 힘은 일부는 마찰력(friction)이, 일부는 막대가 버틴다. 무너지는 순간에는 마찰력이 낼 수 있는 최대한을 내고 있으므로, 나머지는 막대가 감당해야 한다.

풀이

모형

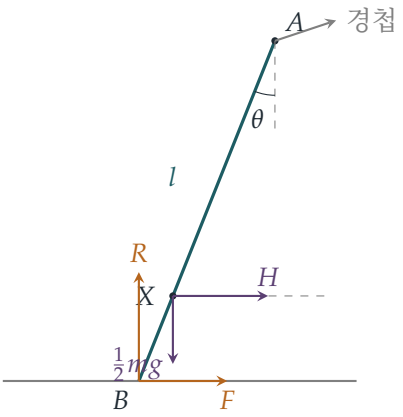
사다리는 가벼운 막대(light rod)이고 A에서 매끄러운 경첩으로 연결되어 있다. 나무 막대 XY는 질량이 m인 균일한(uniform) 막대이고 X와 Y에서 핀 접합(pin-jointed)되어 있다. 질량 M은 A에 놓인 질점(particle)이다. $t = \tan\theta$라 하자. 전체 구조의 좌우 대칭(symmetry)에 의해 두 발에는 같은 크기의 수직항력(normal reaction) R가 작용하고, 접사다리 전체에 대해 연직 방향으로 힘을 분해하면

$$2R = (M+m)g \quad \Longrightarrow \quad R = \tfrac{1}{2}(M+m)g.$$

사다리가 바깥쪽으로 기울어져 있으므로 두 발은 서로 벌어지며 미끄러지려 하고, 따라서 각 발에서의 마찰력 F는 안쪽으로 작용한다.

막대가 가하는 힘. 막대는 수평이고 자체 무게가 있으므로, 양 끝에 작용하는 힘은 막대 방향이 아니다. 대칭에 의해 각 끝이 무게의 절반씩을 지탱하므로, 사다리는 X에서 막대에 위쪽으로 $\frac{1}{2}mg$의 힘을 가하고, 이와 함께 바깥쪽으로 수평 방향의 힘 H(장력(tension))를 가

한다. 뉴턴 제3법칙(Newton's third law)에 의해, 막대는 X에서 사다리 AB를 수평 방향으로 안쪽으로 H의 힘으로, 연직 방향으로 아래쪽으로 $\frac{1}{2}mg$의 힘으로 당긴다.



사다리 AB에 대한 A 중심의 모멘트

A를 기준으로 재면, 발 B는 가로로 $l\sin\theta$, 아래로 $l\cos\theta$만큼 떨어져 있고, X는 가로로 $\frac{3}{4}l\sin\theta$, 아래로 $\frac{3}{4}l\cos\theta$만큼 떨어져 있다. A에 대한 모멘트를 구하면(A에 작용하는 힘들은 모두 모멘트가 0이다):

- R는 사다리를 한쪽 방향으로 돌리며, 그 모멘트는 $Rl\sin\theta$이다.
- F와 H(둘 다 안쪽 방향이고 A보다 아래에서 작용)는 사다리를 반대 방향으로 돌리며, 모멘트는 각각 $Fl\cos\theta$와 $H\cdot\frac{3}{4}l\cos\theta$이다.
- X에서 아래쪽으로 작용하는 $\frac{1}{2}mg$는 R와 같은 쪽에 있지만 방향이 반대이므로, 모멘트 $\frac{1}{2}mg\cdot\frac{3}{4}l\sin\theta$로 R에 맞선다.

따라서

$$Fl\cos\theta+\tfrac{3}{4}Hl\cos\theta=Rl\sin\theta-\tfrac{3}{8}mgl\sin\theta,$$

이고, 양변을 $l\cos\theta$로 나누고 R를 대입하면

$$F+\tfrac{3}{4}H=t\left(\tfrac{1}{2}(M+m)g-\tfrac{3}{8}mg\right)=t\left(\tfrac{1}{2}M+\tfrac{1}{8}m\right)g. \qquad (*)$$

생각해 보기 마찰력과 막대가 모두 발을 안쪽으로 붙잡고 있다. F의 값으로 무엇을 써야 할까?

식 $(*)$는 마찰력과 장력이 정해진 양의 일을 나누어 맡는다는 뜻이다. 마찰력이 더 많이 맡을수록 막대는 덜 맡아도 된다. 따라서 허용되는 어떤 마찰력($F\le\mu R$)에 대해 $H\le T$가 되기만 하면 접사다리는 버티고, 가능한 가장 작은 장력은 가장 큰 마찰력 $F=\mu R$에서 얻어진

다. 이것이 문제에서 가정해도 된다고 한, 무너지는 순간의 한계 상태(limiting state)이다. $F = \mu R = \frac{1}{2}\mu(M+m)g$를 $(*)$에 대입하면

$$\begin{aligned}\tfrac{3}{4}H &= t\left(\tfrac{1}{2}M + \tfrac{1}{8}m\right)g - \tfrac{1}{2}\mu(M+m)g \\ &= \tfrac{1}{2}(t-\mu)Mg + \tfrac{1}{8}(t-4\mu)mg,\end{aligned}$$

이므로

$$H = \tfrac{2}{3}(t-\mu)Mg + \tfrac{1}{6}(t-4\mu)mg.$$

$t > \mu$이므로 H는 M에 대해 증가한다. 막대가 없으면 마찰력만으로는 짐조차 지탱할 수 없다($m = 0$이면 $t \le \mu$가 필요하다).

안전한 최대 질량

막대는 $H \le T$이면 견딘다. 즉

$$\tfrac{2}{3}(t-\mu)Mg \le T - \tfrac{1}{6}(t-4\mu)mg,$$

이고, 양수인 $\frac{2}{3}(t-\mu)g$로 양변을 나누면

$$\boxed{M \le \frac{6T - (\tan\theta - 4\mu)mg}{4(\tan\theta - \mu)g}}$$

따라서 A에 안전하게 놓을 수 있는 최대 질량은 $\dfrac{6T - (\tan\theta - 4\mu)mg}{4(\tan\theta - \mu)g}$이다.

자체 무게로 인한 파손

A에 아무것도 없을 때($M = 0$) 필요한 장력은 $H = \frac{1}{6}(t-4\mu)mg$이므로, 막대가 부러질 조건은

$$\tfrac{1}{6}(\tan\theta - 4\mu)mg > T \iff \tan\theta > \frac{6T}{mg} + 4\mu,$$

이고, 이것이 보이려던 것이다. 이 경우 위에서 구한 M의 상한은 음수가 된다. 즉 접사다리가 자기 자신조차 지탱하지 못하므로, 어떤 짐도 안전하지 않다.

검산

- T가 매우 크면 안전한 질량도 매우 크다. 또 $\tan\theta$가 μ를 아주 조금만 넘으면 분모가 매우 작아져서, 역시 거의 어떤 짐이든 안전하다. 마찰력만으로도 거의 충분하기 때문이다.
- 전체 정역학 문제(두 사다리, 막대, A의 핀을 모두 포함하고, 미지의 힘 성분 12개와 두 발에서의 한계 마찰력을 고려한 것)를 무작위 배치 2000개에 대해 수치적으로 풀었더니, 장력 공식이 약 10^{-12}의 정밀도로 재현되었다. 예를 들어 $\theta = 45^\circ$, $\mu = 0.2$, $m = 2\,\mathrm{kg}$, $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$일 때, $M = 0$에서 막대의 장력은 $\frac{1}{6}(0.2)(19.6) \approx 0.653\,\mathrm{N}$이다.

흔한 실수

- 막대를 가벼운 연결재로 취급해서 X에서의 힘이 순전히 XY 방향이라고 보는 것. 막대에는 무게가 있으므로 각 끝은 연직 방향으로 $\frac{1}{2}mg$도 지탱하며, $\frac{1}{8}m$과 4μ는 바로 여기서 나온다.
- 발에서의 마찰력을 바깥쪽으로 두는 것. $\tan\theta > \mu$이므로 발은 벌어지려 하고, 따라서 마찰력은 안쪽을 향하며 막대를 돕는다.

STEP 너머

이처럼 평형(equilibrium) 방정식만으로는 모든 힘이 정해지지 않는 구조물(여기서는 마찰력과 장력이 서로 주고받을 수 있다)을 **정역학적 부정정**(statically indeterminate) 구조라고 한다. 공학자들은 이런 경우를 추가 정보로 해결한다. 여기서처럼 한계 조건을 쓰거나, 부재의 탄성(elasticity)을 이용하는 것이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 힘, 토크(torque), 평형에 대한 이해를 깊게 하기에 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.