풀이

STEP I 1992, 문제 11

역학 • 탄성 끈의 평형

> **STEP I 1992, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q11

핵심 아이디어

각 입자는 평형(equilibrium) 상태에 있으므로, 입자 바로 위의 장력(tension)은 바로 아래의 장력보다 mg만큼 크다. 이것으로 세 장력이 서로 연결되고, 훅의 법칙(Hooke's law)은 장력을 늘어난 길이(extension)로 바꾸어 준다. 추가로 필요한 사실은 기하적인 것 하나뿐이다. 늘어난 세 줄의 길이를 더하면 방의 높이가 되어야 한다. 높이를 알고 나면, "$CD = a$"는 가장 아래 줄에 장력이 걸리지 않는다는 말일 뿐이다.

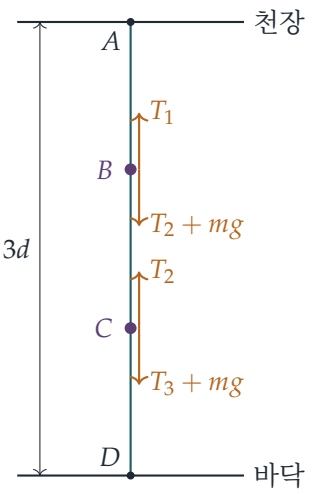
풀이

모형

줄은 가볍고 탄성(elastic)이 있으며, 늘어날 때 훅의 법칙(장력 $= \lambda \times$ 늘어난 길이$/a$)을 따른다. 입자들은 정지해 있다. AB, BC, CD의 장력을 T_1, T_2, T_3이라 하고 늘어난 길이를 x_1, x_2, x_3이라 하면 $T_i = \lambda x_i / a$이다. 무게 mg 하나만으로 생기는 늘어난 길이에 이름을 붙여 두면 편리하다.

$$e = \frac{mga}{\lambda}.$$

먼저 세 줄이 모두 팽팽하다(taut)고 가정하고, 이것이 언제 성립하는지는 나중에 확인한다. 바닥으로부터의 높이를 y_B, y_C로 잰다.



B와 C의 높이

각 입자에 대해 연직 방향으로 힘을 분해하면(위의 줄은 위로 당기고, 아래의 줄과 무게는 아래로 당긴다) 다음을 얻는다.

$$B: \quad T_1 = T_2 + mg, \qquad C: \quad T_2 = T_3 + mg.$$

λ/a로 나누면 이 식들은 늘어난 길이에 관한 식이 된다.

$$x_1 = x_2 + e, \qquad x_2 = x_3 + e, \qquad \text{따라서} \qquad x_2 = x_3 + e, \quad x_1 = x_3 + 2e.$$

세 줄의 전체 길이는 방의 높이와 같다.

$$3a + x_1 + x_2 + x_3 = 3d \quad \Longrightarrow \quad 3x_3 + 3e = 3d - 3a \quad \Longrightarrow \quad x_3 = d - a - e.$$

그러면 $x_2 = d - a$이고 $x_1 = d - a + e$이다. 높이는 아래쪽 줄들의 길이로부터 얻어진다.

$$y_C = CD = a + x_3 = d - e = d - \frac{mga}{\lambda},$$
$$y_B = y_C + BC = (d - e) + (a + d - a) = 2d - \frac{mga}{\lambda}.$$

AB로 검산하면 $3d - y_B = d + e = a + x_1$이 되어 예상대로이다.

? 생각해 보기 이 답들은 실제로 언제 유효한가?

모든 줄이 팽팽하다고 가정했으므로, 모든 늘어난 길이가 0 이상이어야 한다. 가장 까다로운 조건은 가장 아래 줄에 대한 것으로, $x_3 \geq 0$, 즉

$$\frac{mga}{\lambda} \leq d - a.$$

이다. (그러면 $x_2 = d - a \geq 0$이고 $x_1 > 0$은 저절로 성립한다.) CD가 가장 먼저 느슨해지는(slack) 것은 자연스럽다. 이 줄은 아무것도 받치고 있지 않으며, 방에 의해 늘어나 있다는 사실만이 이 줄을 팽팽하게 유지한다. $mga/\lambda > d - a$이면 줄 CD는 느슨해지고, 계는 A에 매달린 두 입자일 뿐이다. 이때 $T_2 = mg$, $T_1 = 2mg$이므로 $AB = a + 2e$, $BC = a + e$이고, 따라서 이 위치가 여전히 바닥보다 위에 있다면 $y_B = 3d - a - 2e$, $y_C = 3d - 2a - 3e$이다. 문제에서 의도한 것은 모든 줄이 팽팽한 주된 경우이다.

$CD = a$는 언제 가능한가?

줄 CD가 정확히 자연 길이(natural length)를 갖는 것은 장력 없이 막 팽팽해진 때, 즉 $T_3 = 0$, 다시 말해 $x_3 = 0$일 때이다. 이는 위의 두 경우의 경계이며, 어느 쪽 공식을 써도 다음을 얻는다.

$$y_C = a \iff d - \frac{mga}{\lambda} = a \iff m = \frac{\lambda(d-a)}{ga}.$$

물리적으로는, 이때 C에 있는 입자는 전적으로 BC에 의해 지탱되며 $T_2 = mg$, $T_1 = 2mg$이다.

알맞은 질량이 존재하는 것은 정확히 이 m의 값이 양수일 때이고, 이를 위해서는 $d > a$이어야 한다. 역으로 $d \leq a$이면 어떤 양수 m도 조건을 만족하지 않는다. 모든 줄이 팽팽하다면 $x_2 = d - a \geq 0$이면서 $x_3 = d - a - e < 0$이어야 하는데 이는 불가능하므로, CD는 느슨하고 C는 높이 $3d - 2a - 3e < 3a - 2a = a$에 매달리거나(또는 바닥에 놓이고), 따라서 $CD < a$이다. 그러므로 구하는 값의 집합은

$$\{\, d : d > a \,\}.$$

이다. 이러한 d에 대해 $y_C = a$, $y_B = d + a$, $AB = 2d - a$를 얻는다.

검산

- 단위: mga/λ는 힘 곱하기 길이를 힘으로 나눈 것이므로 길이이며, d에서 빼려면 당연히 그래야 한다.
- $m = 0$이면 세 줄이 늘어남을 똑같이 나누어 가진다. 각 줄의 길이가 d가 되어 C는 d에, B는 $2d$에 놓인다. 질량을 더하면 두 입자가 같은 양 e만큼 내려가는데, BC의 늘어난 길이가 $d - a$로 유지되기 때문이다.
- 수치적으로, a, λ, d, m을 무작위로 250번 골라 $0 \leq y_C \leq y_B \leq 3d$에서 위치 에너지(potential energy)(중력에 의한 것과 탄성에 의한 것의 합, 느슨한 줄도 허용)를 최소화했더니, 팽팽한 경우와 CD가 느슨한 경우 모두에서 높이가 10^{-14} 이내로 재현되었다. $a = 1$, $\lambda = 10$, $d = 2$, $m = \lambda(d-a)/(ga) \approx 1.020$으로 두면 $CD = 1.000000$, $y_B = 3.000000$을 얻었고, $d \leq a$일 때는 어떤 양수 m도 $CD = a$를 주지 않았다.

흔한 실수

- 장력을 $\lambda\times$ 늘어난 길이$/a$ 대신 $\lambda\times$ (늘어난 상태의 전체 길이) $/a$로 쓰는 것.
- 전체 길이가 방에 의해 고정된다는 것을 잊는 것. $\sum(a + x_i) = 3d$가 없으면 평형 방정식만으로는 늘어난 길이가 결정되지 않는다.
- 모든 줄에 반드시 장력이 걸린다고 가정하는 것. 줄은 느슨해질 수 있으며, $CD = a$는 정확히 느슨해지는 경계에서 일어난다.

STEP 너머

이것은 작은 정역학적 부정정(statically indeterminate) 구조이다. 입자들의 평형만으로는 장력이 정해지지 않고, 적합 조건(compatibility condition)(길이의 합이 맞아야 한다는 조건)이 추가로 필요했다. 같은 아이디어를 행렬(matrix) 형태로 쓰면, 공학자들이 용수철과 막대로 이루어진 골조를 해석하는 방법이 된다. 또 다른 접근은 전체 위치 에너지를 최소화하는 것으로, 수치 검산이 바로 이 방식으로 이루어졌다. 이러한 변분(variational) 관점은 이후의 역학에서 핵심적이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 용수철, 평형, 위치 에너지를 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.