풀이

STEP I 1992, 문제 10

역학 • 반동과 운동량

> **STEP I 1992, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q10

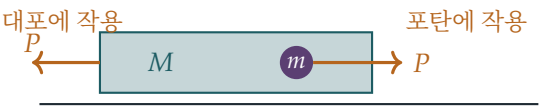
핵심 아이디어

힘 P는 포탄(projectile)을 앞으로 밀지만, 뉴턴(Newton)의 제3법칙(Newton's third law)에 따라 포탄도 같은 크기의 힘 P로 대포를 뒤로 민다. 그리고 수평 방향으로는 대포의 반동(recoil)을 막는 것이 아무것도 없다. 따라서 포탄이 포신 안에 있는 동안 지면에 대해 거리 l을 이동하는 것이 **아니라, 대포에 대해** l을 이동한다. 두 물체 모두 가속도가 일정하므로, 상대 운동(relative motion)을 다루는 것이 가장 깔끔한 방법이다.

풀이

모형

포탄과 대포를 같은 수평선 위를 움직이는 질점(particle)으로 보고, 바닥은 매끄럽다고(대포가 "자유롭게 미끄러진다") 하며, 포신을 따라 포탄과 포신 사이에 작용하는 힘은 상수 P라고 한다. 연직 방향으로는 무게가 수직항력(normal reaction)(대포에 작용하는 바닥의 힘, 포탄에 작용하는 포신의 힘)과 평형을 이루므로 수평 운동에는 아무 영향을 주지 않는다. 발사 방향을 양의 방향으로 잡는다.



두 가속도

포탄이 포신 안에 있는 동안 포탄에 작용하는 수평 방향의 힘은 앞쪽으로 향하는 P뿐이고, 대포에 작용하는 수평 방향의 힘은 뒤쪽으로 향하는 반작용 P뿐이다(뉴턴의 제3법칙; 바닥

은 매끄럽다). 뉴턴의 제2법칙(Newton's second law)에 따라 가속도는

$$a_{\text{포탄}} = \frac{P}{m}, \qquad a_{\text{대포}} = -\frac{P}{M}.$$

이다. 두 가속도는 모두 일정하고, 두 물체는 모두 정지 상태에서 출발한다.

? **생각해 보기** 포탄은 어떤 거리에 걸쳐 가속되는가? l인가, 아니면 다른 값인가?

포신의 길이는 l이지만 포신 자체가 뒤로 움직인다. 포탄은 **대포에 대한** 변위가 l에 이를 때 포신을 떠난다. 대포에 대해 포탄은 정지 상태에서 출발하여 일정한 가속도

$$a_{\text{rel}} = \frac{P}{m} - \left(-\frac{P}{M}\right) = \frac{P}{m} + \frac{P}{M} = \frac{P(M+m)}{mM}$$

로 움직인다.

포신 안에 있는 시간

상대 운동에 $s = \frac{1}{2}at^2$을 적용하면, 포탄이 포신을 빠져나오는 시각 T는

$$l = \frac{1}{2} \cdot \frac{P(M+m)}{mM} T^2, \qquad \text{따라서} \qquad T^2 = \frac{2mMl}{P(M+m)}.$$

을 만족한다.

발사 속력

지면에 대해 포탄은 정지 상태에서 일정한 가속도 P/m으로 움직이므로, 시각 T에서의 속력 v는

$$\begin{aligned} v^2 = \left(\frac{P}{m}T\right)^2 &= \frac{P^2}{m^2} \cdot \frac{2mMl}{P(M+m)} \\ &= \frac{2PMl}{m(M+m)}. \end{aligned}$$

을 만족한다. $v > 0$이므로

$$v = \sqrt{\frac{2PMl}{m(M+m)}},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

다른 방법: 에너지와 운동량

같은 답을 보존 법칙(conservation law)으로도 얻을 수 있다. 수평 방향의 외력이 없으므로 수평 방향의 운동량(momentum)이 보존된다. 포탄이 빠져나오는 순간 대포가 뒤쪽으로 속력 V를 가진다면 $mv = MV$이다. 포탄이 포신 안에 있는 동안 포탄이 앞으로 x, 대포

가 뒤로 X만큼 움직인다면 $x + X = l$이다. 포탄에 작용하는 힘이 하는 일(work)은 Px이고, 대포에 작용하는 반작용은 대포가 움직이는 방향과 같은 쪽을 향하므로 일 PX를 한다. 두 힘이 한 일을 합하면 $P(x + X) = Pl$이다. 따라서

$$Pl = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}MV^2 = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}M\left(\frac{mv}{M}\right)^2 = \tfrac{1}{2}mv^2\,\frac{M+m}{M},$$

이고, 이로부터 다시 $v^2 = \dfrac{2PMl}{m(M+m)}$을 얻는다.

검산

- 무거운 대포: $M \to \infty$이면 인수 $M/(M+m) \to 1$이고 $v \to \sqrt{2Pl/m}$이다. 이는 고정된 대포에서의 속력이다(일 Pl이 모두 포탄에 전달된다). 반동하는 대포에서는 에너지의 일부가 반동에 쓰이므로, 마땅히 속력이 항상 조금 더 작다.
- 단위: Pl은 에너지이고 Pl/m의 단위는 $\mathrm{m^2\,s^{-2}}$이므로 v는 속력이다.
- 수치: $m = 0.1$, $M = 0.9$, $P = 9$, $l = 0.5$(SI 단위)이면 공식은 $v = 9\ \mathrm{m\,s^{-1}}$을 주고, 대포는 $1\ \mathrm{m\,s^{-1}}$로 반동한다. 이때 운동량은 $0.1 \times 9 = 0.9 \times 1$이고 운동 에너지는 $4.05 + 0.45 = 4.5 = Pl$이다. 두 물체의 운동을 단계별로 수치 시뮬레이션하고 두 물체 사이의 간격이 l에 이를 때 멈추면, 여러 무작위 값의 m, M, P, l에 대해 결과가 공식과 일치한다.

흔한 실수

- $v^2 = 2(P/m)l$을 쓰는 것. 이는 l을 지면에 대한 포탄의 이동 거리로 보고 반동을 무시한 것이다.
- 뉴턴의 제3법칙을 잊고 대포를 정지한 채로 두는 것. 대포는 자유롭게 미끄러지므로 반드시 반동한다.
- 에너지 방법에서 한 일을 P와 포탄의 지면에 대한 변위의 곱으로만 잡는 것. 대포에 작용하는 반작용도 일을 한다.

STEP 너머

이것은 이체 문제(two-body problem)이고, 상대 가속도 $P(M+m)/(mM)$은 P를 **환산 질량**(reduced mass) $\mu = mM/(m+M)$으로 나눈 값이다. 서로에게만 상호작용하는 두 물체는, 서로에 대해서는 질량이 μ인 하나의 물체처럼 움직인다. 같은 아이디어로 행성의 궤도, 쌍성, 충돌하는 입자를 다룰 수 있으며, 이는 로켓 문제와 반동 문제의 바탕이 되기도 한

다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 여기서 다룬 환산 질량과 운동량의 아이디어를 모두 자세히 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.