풀이

# STEP I 1992, 문제 1

순수수학 • 7을 법으로 하는 달력 계산

> **STEP I 1992, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q1

## 핵심 아이디어

요일은 7일마다 반복되므로, 두 날짜 사이의 날수를 구해 7을 법으로(modulo) 줄이기만 하면 된다. 이 계산을 수월하게 만드는 요령은 $365 = 52 \times 7 + 1$이라는 사실이다. 평년은 요일을 하루 밀어내고, 윤년(leap year)은 이틀 밀어낸다. 따라서 먼저 온전한 해의 수와 윤일의 수를 세고, 남는 달들은 마지막에 처리한다. 문제에서 말하는 "주의 깊게"란 어느 2월 29일이 실제로 구간 안에 들어가는지, 그리고 우리를 넘어뜨릴 수도 있는 단 하나의 세기 연도에 대해 정확히 따지는 것을 뜻한다.

## 풀이

1905년 4월 3일부터 1992년 6월 26일까지의 구간을 두 부분으로 나눈다.

$$\text{1905년 4월 3일} \longrightarrow \text{1992년 4월 3일} \longrightarrow \text{1992년 6월 26일}.$$

### 온전한 해: 1905년 4월 3일부터 1992년 4월 3일까지

이는 $1992 - 1905 = 87$개의 온전한 해이다. 이러한 각 해(4월 3일부터 다음 해 4월 3일까지)는 365일이고, 그 안에 2월 29일이 들어 있으면 하루가 더해진다.

1905년 4월 3일과 1992년 4월 3일 사이에는 어느 2월 29일들이 있는가? 이 범위의 윤년은 4로 나누어떨어지는 해, 즉

$$1908,\ 1912,\ \ldots,\ 1988,\ 1992.$$

이다. 1904년의 2월 29일은 1905년 4월 3일보다 앞이므로 세지 않는다. 1992년의 2월 29일

은 1992년 4월 3일보다 앞이므로 센다. 따라서

$$\frac{1992-1908}{4}+1=21+1=22$$

개의 윤일이 있다.

**생각해 보기** 이 범위에서 4로 나누어떨어지는 해가 정말 모두 윤년인가?

그레고리력(Gregorian calendar)에서 세기 연도는 400으로 나누어떨어질 때에만 윤년이다. 따라서 1900년은 윤년이 **아니었다**(2000년은 윤년이었다). 그러나 이 두 해 모두 우리 구간 안에 있지 않으므로, 단순한 "4로 나누어떨어진다"는 규칙(운율 시에 나오는 규칙)이 여기서는 정확히 맞다. 만약 문제가 1900년 이전까지 거슬러 올라갔다면 1900년 2월 29일을 빼야 했을 것이다.

따라서 1905년 4월 3일부터 1992년 4월 3일까지의 날수는

$$87\times 365+22=31\,755+22=31\,777.$$

이다. 7을 법으로 계산하면 더 빠르다. $365\equiv 1 \pmod 7$이므로 이는

$$87+22=109=15\times 7+4\equiv 4 \pmod 7.$$

이다.

### 남는 달: 1992년 4월 3일부터 1992년 6월 26일까지

운율 시에 따르면 4월은 30일, 5월은 31일이므로

$$\begin{aligned}&4\text{월 }3\text{일}\to 5\text{월 }3\text{일}:30\text{일},\\&5\text{월 }3\text{일}\to 6\text{월 }3\text{일}:31\text{일},\\&6\text{월 }3\text{일}\to 6\text{월 }26\text{일}:23\text{일},\end{aligned}$$

합계 $30+31+23=84=12\times 7$일이고, 이는 $\equiv 0 \pmod 7$이다. 반갑게도 1992년 4월 3일과 1992년 6월 26일은 같은 요일이다.

### 종합하기

전체 간격은

$$31\,777+84=31\,861=4551\times 7+4\text{일},$$

이므로, 1905년 4월 3일은 1992년 6월 26일보다 요일로 4일 **앞선다**. 금요일에서 나흘을 거꾸로 세면 목요일, 수요일, 화요일, 월요일이다. 따라서

$$1905\text{년 }4\text{월 }3\text{일은 월요일이었다.}$$

## 검산

- 컴퓨터로 두 날짜 사이의 날수를 달마다 직접 세어 보면 31 861일이 나오고, 이는 4 (mod 7)이다. 컴퓨터 달력에서도 1905년 4월 3일은 월요일(1992년 6월 26일은 금요일)로 나온다.
- 방향에 대한 점검: 월요일에서 4일 **앞으로** 가면 금요일이 되니, 마땅히 그래야 하는 대로이다.
- 윤일의 수를 다른 방법으로 점검: 87년에는 대략 $87/4 \approx 21.75$개의 윤일이 있으므로 22는 그럴듯하다.

## 흔한 실수

- 1904년 2월 29일(시작 날짜보다 앞)을 포함하거나 1992년 2월 29일(끝 날짜보다 앞)을 빼는 것: 어느 쪽이든 답이 하루 어긋난다.
- 앞으로 세어야 할 것을 거꾸로 세거나, 그 반대로 하는 것: 나머지 4는 일주일 주기에서 1905년이 금요일보다 나흘 **앞**이라는 뜻이지, 뒤라는 뜻이 아니다.
- 이 방법을 더 이른 날짜로 확장할 때 1900년을 윤년으로 취급하는 것.

## STEP 너머

이것은 7을 법으로 하는 산술이다. 핵심 사실 $365 \equiv 1 \pmod 7$이 큰 수의 셈을 작은 수의 셈으로 바꾸어 준다. 합동식(congruence)과, 임의의 날짜의 요일을 구하는 첼러(Zeller)의 합동식 같은 달력 퍼즐에서의 그 쓰임은 정수론(number theory) 첫 강좌의 표준적인 내용이다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 합동식을 비롯한 많은 내용을 다루는 훌륭한 입문서이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.