풀이

# STEP III 1991, 문제 9

순수수학 • 타원의 호의 길이

> **STEP III 1991, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s3-q9

## 핵심 아이디어

$E_1$은 중심을 기준으로 한 형태로 쓴 타원(ellipse)이고, $E_2$는 같은 곡선을 초점(focus)에 극(pole)을 둔 극좌표 형태(polar form)로 쓴 것이다. $E_2$를 직교좌표 형태로 바꾸고 완전제곱식(completing the square)을 만들면 중심과 축의 위치가 드러나고, 반축(semi-axis)을 비교하면 $k$와 $b$를 얻는다. 적분에 대해서는, 둘레(perimeter)는 하나의 수이지만 각 매개변수화(parametrisation)가 겉보기에 서로 다른 호의 길이(arc length) 적분을 준다.

## 풀이

**축, $k$와 $b$**

$E_2$의 좌표를 $(x, y)$로 쓰고 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \theta_2$로 놓는다. 그러면 $E_2$는 $r = \dfrac{k}{1 + e\cos\theta}$, 즉 $r + er\cos\theta = k$를 뜻하므로

$$r = k - ex.$$

양변을 제곱하면 (곡선 위에서 $r = k/(1 + e\cos\theta) > 0$이므로 이 과정에서 잃는 것은 없다)

$$x^2 + y^2 = k^2 - 2kex + e^2x^2 \quad \Longrightarrow \quad (1 - e^2)x^2 + 2kex + y^2 = k^2.$$

$x$에 대해 완전제곱식을 만들면

$$(1 - e^2)\left(x + \frac{ke}{1 - e^2}\right)^2 + y^2 = k^2 + \frac{k^2e^2}{1 - e^2} = \frac{k^2}{1 - e^2},$$

이므로

$$\frac{(x + \frac{ke}{1-e^2})^2}{k^2/(1 - e^2)^2} + \frac{y^2}{k^2/(1 - e^2)} = 1.$$

이것은 $E_2$ 축에서 중심이 $(-\frac{ke}{1-e^2}, 0)$이고, 대칭축(axes of symmetry)이 $E_2$ 축과 평행하며, 반축이

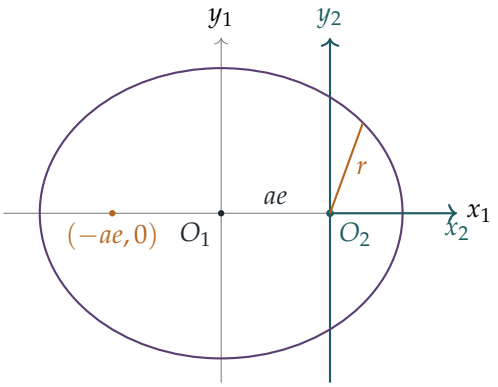
$$A = \frac{k}{1-e^2} \ (x \text{ 방향}), \qquad B = \frac{k}{\sqrt{1-e^2}} \ (y \text{ 방향}).$$

인 타원이다. $0 < 1 - e^2 < 1$이므로 $A > B$이고, 따라서 장축(major axis)은 $E_2$의 $x$축 위에 있다. $E_1$은 $a > b$인 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$이므로 장축이 $E_1$의 $x$축 위에 있다. 두 곡선이 같으므로 장반축끼리 같고 단반축끼리도 같다.

$$a = \frac{k}{1-e^2}, \quad \text{즉} \quad k = a(1-e^2), \qquad b^2 = \frac{k^2}{1-e^2} = \frac{a^2(1-e^2)^2}{1-e^2} = a^2(1-e^2),$$

이것이 요구된 두 결과이다.

$E_1$의 원점인 중심은 $E_2$의 $x$축 위의 $x = -\frac{ke}{1-e^2} = -ae$에 있다. 따라서 $E_2$ 축은 $E_1$ 축을 장축을 따라 거리 $ae$만큼 평행이동한 것이다. 즉 $E_2$의 원점은 $E_1$의 점 $(ae, 0)$이고, $a^2 - b^2 = a^2e^2$이므로 이 점은 초점이다. 두 $x$축은 같은 직선(장축) 위에 있고 $y$축끼리는 평행하다. $E_1$ 좌표로 쓰면 $x_1 = x_2 + ae$, $y_1 = y_2$이다. 타원은 두 축에 대해 모두 대칭이므로, $E_2$의 원점을 다른 초점 $(-ae, 0)$에 두고 $x$축의 방향을 뒤집어도 똑같다. 어느 경우든 $\theta_2 = 0$인 점은 초점에 가장 가까운 꼭짓점(vertex)이다.




## 두 적분

타원의 위쪽 절반($y \geq 0$)의 길이를 두 가지 방법으로 계산한다.

**$E_1$을 이용하기.** $\theta_1$이 0에서 $\pi$까지 움직일 때 점은 위쪽 절반을 한 번 지나간다. $\dot{x} = -a\sin\theta_1$, $\dot{y} = b\cos\theta_1$이므로, $a^2 - b^2 = a^2e^2$를 이용하면

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2\sin^2\theta_1 + b^2\cos^2\theta_1 = a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2\theta_1 = a^2\left(1 - e^2\cos^2\theta_1\right),$$

이다. 따라서 둘레의 절반은

$$\tfrac{1}{2}P = a\int_0^{\pi} \sqrt{1 - e^2\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

**$E_2$를 이용하기.** 여기서는 $r > 0$이므로 $y_2 = r\sin\theta_2 \geq 0$일 필요충분조건은 $0 \leq \theta_2 \leq \pi$이다. 따라서 $\theta_2 \in [0, \pi]$도 위쪽 절반을 한 번 그린다. 극좌표에서는 $\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2$이다. $r = k(1 + e\cos\theta)^{-1}$이면

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{ke\sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2},$$

이므로

$$r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = \frac{k^2\left[(1+e\cos\theta)^2 + e^2\sin^2\theta\right]}{(1+e\cos\theta)^4} = \frac{k^2\left(1+e^2+2e\cos\theta\right)}{(1+e\cos\theta)^4}.$$

그러므로 $k = a(1-e^2)$를 이용하면

$$\tfrac{1}{2}P = a(1-e^2)\int_0^\pi \frac{\sqrt{1+e^2+2e\cos\theta}}{(1+e\cos\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

$\frac{1}{2}P$에 대한 두 식을 같게 놓고 $a > 0$으로 나누면 요구된 항등식을 얻는다.

> **생각해 보기** 왜 두 매개변수가 모두 $[0, \pi]$에서 움직여야 하고, 어느 하나가 다른 범위에서 움직이면 안 되는가?

두 호의 길이는 곡선의 같은 부분에 대한 것이어야 한다. $\theta_1$과 $\theta_2$는 서로 다른 각(하나는 중심에서 잰 이심각(eccentric angle), 다른 하나는 초점에서 잰 극각)이지만, 각각 $[0, \pi]$에서 오른쪽 꼭짓점 $(a, 0)$부터 왼쪽 꼭짓점 $(-a, 0)$까지 위쪽 절반을 훑는다. 따라서 두 적분은 같은 호를 잰다.

### 근사

$0 \leq e^2\cos^2\theta < 1$이므로 이항급수(binomial series)를 적용할 수 있다.

$$\sqrt{1-u} = 1 - \tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{8}u^2 + O(u^3), \qquad u = e^2\cos^2\theta.$$

$O(u^3)$ 항은 $O(e^6)$이므로 무시한다.

$$\int_0^\pi \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^\pi \cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{3\pi}{8}$$

($\cos^4\theta = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{8}\cos 4\theta$에서 나온다)을 이용하면

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sqrt{1-e^2\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta &\approx \pi - \frac{e^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{e^4}{8}\cdot\frac{3\pi}{8} = \pi\left(1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3e^4}{64}\right)\\ &= \tfrac{1}{64}\pi\left(64 - 16e^2 - 3e^4\right).\end{aligned}$$

을 얻는다. 방금 증명한 항등식에 의해 두 번째 적분도 같은 값을 가진다. 이것으로 문제가 끝난다.

## 검산

- $e = 0$일 때 두 적분은 모두 $\pi$이고, $E_2$는 $k = a$인 원 $r = k$가 된다. 올바르다.
- $a = 2$, $b = 1$ (따라서 $e^2 = \frac{3}{4}$)일 때, 200 000각형으로 계산하면 둘레가 9.6884482이고, 이는 첫 번째 적분의 $2a$배와 일치한다.
- 수치적으로 $e = 0.2$에서 두 적분은 모두 3.1099371이고 근사식은 3.1099411을 준다. 차이는 약 $-0.063e^6$으로, 급수의 다음 항 $-\frac{5\pi}{256}e^6 \approx -0.061e^6$과 잘 맞는다.

## 흔한 실수

- $E_2$의 원점을 중심에 두는 것. 분모에 $1 + e\cos\theta$가 있는 극좌표 형태는 언제나 극이 초점에 있다.
- 극좌표 호의 길이에서 $(\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta)^2$ 항을 빠뜨리거나, 한쪽은 $[0, 2\pi]$에서, 다른 쪽은 $[0, \pi]$에서 적분하는 것.

## STEP 너머

적분 $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$는 제2종 완전 타원적분(complete elliptic integral of the second kind) $E(e)$이므로, 타원의 둘레는 $4aE(e)$이다. 이것은 초등함수(elementary functions)로 나타낼 수 없으며, 그래서 여기서와 같은 급수(그리고 라마누잔(Ramanujan)의 놀랍도록 정확한 근사식)가 중요하다. 타원적분은 타원함수(elliptic functions)와 타원곡선(elliptic curves)으로 이어지는데, 타원곡선은 현대 정수론(number theory)의 중심 주제이다. 이런 유형의 문제를 더 보려면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.