풀이

STEP III 1991, 문제 8

순수수학 • 점화 공식과 합

> **STEP III 1991, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s3-q8

핵심 아이디어

소문항 (i)은 점화 공식(reduction formula)이므로, 부분적분(integration by parts)을 먼저 시도하는 것이 자연스럽다. 남는 피적분함수(integrand)에는 $\sin x \sin kx$가 들어 있는데, $\cos(k-1)x$에 대한 삼각함수의 덧셈정리(compound-angle formula)를 쓰면 이것을 다시 같은 꼴의 적분들로 바꿀 수 있다. 소문항 (ii)는 $(1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta})^m$의 이항전개(binomial expansion)에서 실수부분(real part)을 비교하는 문제이다. 소문항 (iii)은 (ii)를 적분하고, (i)의 점화식을 망원 합(telescoping)으로 풀어내면 얻어진다.

풀이

소문항 (i)

$k \geq 1$이라 하고, $u = \cos^k x$, $\mathrm{d}v = \cos kx \, \mathrm{d}x$로 두어 부분적분한다. 그러면 $v = \frac{1}{k}\sin kx$이고 $\mathrm{d}u = -k\cos^{k-1} x \sin x \, \mathrm{d}x$이므로

$$\begin{aligned} I_k &= \left[\tfrac{1}{k}\cos^k x \sin kx\right]_0^\theta + \int_0^\theta \cos^{k-1} x \, \sin x \, \sin kx \, \mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{k}\cos^k \theta \sin k\theta + \int_0^\theta \cos^{k-1} x \, \sin x \, \sin kx \, \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

이다. 괄호 안의 값은 $x = 0$에서 0이 되기 때문이다.

? **생각해 보기** $\sin x \sin kx$를 x의 배수의 코사인들로 어떻게 다시 쓸 수 있을까?

$(k-1)x = kx - x$로 쓰면, 덧셈정리에 의해

$$\cos(k-1)x = \cos kx \cos x + \sin kx \sin x,$$

이므로

$$\sin x \sin kx = \cos(k-1)x - \cos x \cos kx.$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}\int_0^\theta \cos^{k-1} x \, \sin x \, \sin kx \, \mathrm{d}x &= \int_0^\theta \cos^{k-1} x \cos(k-1)x \, \mathrm{d}x \\ &\quad - \int_0^\theta \cos^k x \cos kx \, \mathrm{d}x \\ &= I_{k-1} - I_k.\end{aligned}$$

이다. 이것을 다시 대입하고 양변에 k를 곱하면

$$kI_k = \cos^k \theta \sin k\theta + kI_{k-1} - kI_k,$$

즉

$$2kI_k = kI_{k-1} + \cos^k \theta \sin k\theta,$$

이고, 이것이 증명하려던 식이다.

소문항 (ii)

$z = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}$라 하자. 이항정리(binomial theorem)에 의해

$$\begin{aligned}(1+z)^m &= \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} z^r \\ &= \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} (\cos 2r\theta + \mathrm{i} \sin 2r\theta).\end{aligned}$$

이다. 이제 "반각"을 묶어 내면

$$1 + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = 2\cos\theta \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$

이므로

$$(1+z)^m = 2^m \cos^m \theta \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta} = 2^m \cos^m \theta \, (\cos m\theta + \mathrm{i} \sin m\theta).$$

이다. $2^m \cos^m \theta$는 실수이므로, 두 식의 실수부분을 비교하면

$$\sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} \cos 2r\theta = 2^m \cos^m \theta \cos m\theta,$$

를 얻는다. 이것이 구하려던 항등식이다($r = 0$과 $r = m$인 항은 각각 1과 $\cos 2m\theta$이다).

소문항 (iii)

첫 번째 식을 S라 하자. (ii)의 우변은 I_m의 피적분함수에 2^m을 곱한 것이므로, (ii)를 0부터 θ까지 적분한다. $r = 0$인 항을 적분하면 θ이고, $r \geq 1$이면 $\int_0^\theta \cos 2rx \, \mathrm{d}x = \frac{\sin 2r\theta}{2r}$이다. 따라서

$$\theta + \sum_{r=1}^{m} \binom{m}{r} \frac{\sin 2r\theta}{2r} = 2^m I_m, \qquad \text{따라서} \qquad S = 2^m I_m - \theta.$$

이다.

이제 (i)을 이용하여 $2^m I_m$을 계산한다. 점화식을 $2k$로 나누고 2^k를 곱하면, $k \geq 1$일 때

$$2^k I_k = 2^{k-1} I_{k-1} + \frac{2^{k-1}}{k} \cos^k \theta \sin k\theta.$$

이다.

? 생각해 보기 왜 2^k를 곱할까?

점화식을 $I_k = \frac{1}{2} I_{k-1} + \ldots$ 꼴로 쓰면, 각 단계마다 $\frac{1}{2}$이라는 인수가 붙는다. $J_k = 2^k I_k$를 쓰면 이 인수가 사라진다. 그러면 $J_k - J_{k-1}$이 간단한 명시적인 항이 되고, 합이 망원 합으로 정리된다. $k = 1, 2, \ldots, m$에 대한 식을 모두 더하면 중간 항들이 소거되어

$$2^m I_m = 2^0 I_0 + \sum_{k=1}^{m} \frac{2^{k-1}}{k} \cos^k \theta \sin k\theta.$$

를 얻는다. 마지막으로 $I_0 = \int_0^\theta 1 \, \mathrm{d}x = \theta$이므로

$$\begin{aligned} S = 2^m I_m - \theta &= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} 2^{k-1} \cos^k \theta \sin k\theta \\ &= \cos\theta \sin\theta + \cos^2\theta \sin 2\theta + \cdots + \frac{1}{m} 2^{m-1} \cos^m \theta \sin m\theta, \end{aligned}$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

검산

- $m = 1$: 주장하는 식은 $\frac{1}{2} \sin 2\theta = \cos\theta \sin\theta$이고, 이는 배각 공식(double-angle formula)이다.
- $m = 2$: 좌변은 $\sin 2\theta + \frac{1}{4} \sin 4\theta$이고, 우변은 $\cos\theta \sin\theta + \cos^2\theta \sin 2\theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta (1 + \cos 2\theta)$이다. $\sin 2\theta \cos 2\theta = \frac{1}{2} \sin 4\theta$이므로 두 값은 같다.
- 수치적으로, $m = 5, \theta = 0.7$일 때 두 식의 값은 모두 1.51963이다(소수점 아래 다섯째 자리까지). 점화 공식 또한 임의의 k와 θ에 대하여 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 구한 I_k의 값과 일치함을 확인할 수 있다.

흔한 실수

- 부분적분에서의 부호 실수: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos^k x = -k\cos^{k-1} x \sin x$이며, 이 음의 부호가 $\int v\,\mathrm{d}u$ 앞의 음의 부호와 상쇄된다.
- (ii)에서 $r = 0$인 항을 빠뜨리는 것. 이 항을 적분하면 θ가 되고, 이것이 망원 합의 맨 아래에 있는 $I_0 = \theta$와 상쇄된다.

STEP 너머

$\cos^m\theta\cos m\theta$를 $\cos 2r\theta$들의 일차결합으로 나타내는 것은 곧 푸리에 급수(Fourier series)를 계산하는 일이다. 여기서는 유한 급수이며, 항별로 적분하는 것은 대학 1학년 수리 방법론 과목에서 푸리에 급수를 다루는 방식 그대로이다. (i)과 같은 종류의 점화 공식은 $\int \cos^n x\,\mathrm{d}x$ 꼴의 적분이나 월리스 곱(Wallis product)을 다룰 때 쓰는 표준적인 도구이기도 하다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 (ii)에서 사용한 $1 + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} = 2\cos\theta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$라는 기법에 대한 기하학적 그림을 보여 준다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.