풀이

STEP III 1991, 문제 7

순수수학 • 대칭성을 이용한 적분

> **STEP III 1991, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s3-q7

핵심 아이디어

$\ln(\sin x)$의 적분(integral)은 역도함수(antiderivative)로는 구할 수 없지만, 대칭성(symmetry)이 모든 일을 해 준다. 치환(substitution) $x \mapsto \frac{1}{2}\pi - x$는 sin과 cos을 서로 바꾸고, $x \mapsto \pi - x$는 $[0, \pi]$에서의 $\sin x$가 $[0, \frac{1}{2}\pi]$에서의 값을 두 번 되풀이한 것임을 보여 준다. 이어서 $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$로 쓰면 미지의 적분이 만족해야 하는 방정식을 얻는다. 소문항 (iii)은 $x \cot x$를 $\ln(\sin x)$로 바꾸는 부분적분(integration by parts)이고, 소문항 (ii)는 경계항(boundary term)을 처리한다.

풀이

풀이 전체에서 다음과 같이 둔다.

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x.$$

소문항 (i)

사인 적분과 코사인 적분은 같다. $x = \frac{1}{2}\pi - t$로 치환하면 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$이고 $\sin x = \cos t$이다. 적분 구간의 끝 $0, \frac{1}{2}\pi$는 $\frac{1}{2}\pi, 0$이 되고, 음의 부호가 이를 다시 뒤집는다.

$$I = \int_{\frac{1}{2}\pi}^{0} \ln(\cos t)\,(-\mathrm{d}t) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t.$$

$\sin 2x$와 연결하기. 같은 두 적분을 더하고 $\ln a + \ln b = \ln(ab)$를 이용하면(열린구간에서

$\sin x, \cos x > 0$이므로 성립한다) 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} 2I &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin x \cos x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\tfrac{1}{2}\sin 2x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin 2x)\,\mathrm{d}x - \tfrac{1}{2}\pi \ln 2. \end{aligned}$$

양변을 2로 나누면 $I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin 2x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\pi \ln 2$이고, 이로써 첫 번째 등식이 완성된다.

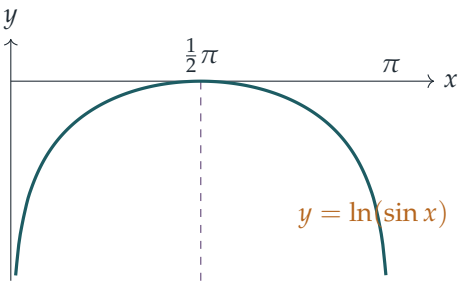
두 번째 등식. $u = 2x$로 두면 $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u$이고, 적분 구간의 끝은 0과 π가 된다.

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin 2x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u.$$

이제 $[0, \pi]$를 $\frac{1}{2}\pi$에서 나눈다. 뒤쪽 절반에서는 $u = \pi - v$로 치환한다. $\sin(\pi - v) = \sin v$이고 적분 구간의 끝 $\frac{1}{2}\pi, \pi$는 $\frac{1}{2}\pi, 0$이 되므로

$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin v)\,\mathrm{d}v = I.$$

아래 그래프가 이 대칭성을 보여 준다. 곡선 $y = \ln(\sin x)$는 $x = \frac{1}{2}\pi$에 대하여 대칭이다.



따라서 $\int_0^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u = 2I$이고, 그러므로

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin 2x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}(2I) = I,$$

가 되어 요구된 결과를 얻는다.

I의 값 구하기. 두 번째 결과를 첫 번째 결과에 대입하면

$$I = \tfrac{1}{2}I - \tfrac{1}{4}\pi \ln 2 \quad \Longrightarrow \quad I = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x = -\tfrac{1}{2}\pi \ln 2.$$

이 단계에서는 I가 유한한 수여야 하며, 문제에서 수렴(convergence)을 가정하도록 허용한 까닭이 바로 이것이다. 그 가정이 없다면 "$I = \frac{1}{2}I + c$"는 아무것도 증명하지 못한다.

소문항 (ii)

$x \geq 1$이라 하고 $u = \sqrt{x}$로 둔다. 그러면 $u \geq 1$이므로 주어진 부등식(inequality)을 적용할 수 있다.

$$\ln \sqrt{x} < \sqrt{x}, \qquad \text{즉,} \qquad \tfrac{1}{2} \ln x < \sqrt{x}.$$

첫 번째 극한. $x \geq 1$이면 $\ln x \geq 0$이고, $\ln x < 2\sqrt{x}$의 양변을 $x > 0$으로 나누면

$$0 \leq \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

$x \to \infty$일 때 우변은 0으로 가므로, 조임 정리(squeeze principle, sandwich principle)에 의하여 $\dfrac{\ln x}{x} \to 0$이다.

두 번째 극한. $0 < x < 1$일 때 $x = 1/t$로 두면 $t > 1$이고, $x \to 0^+$일 때 $t \to \infty$이다. 그러면

$$x \ln x = \frac{1}{t} \ln \frac{1}{t} = -\frac{\ln t}{t} \to 0$$

이 첫 번째 극한(limit)에 의하여 성립한다. 따라서 x가 양수 쪽에서 0으로 갈 때 $x \ln x \to 0$이다.

소문항 (iii)

먼저 피적분함수(integrand)는 0에서 문제가 없음에 주목한다. $x \cot x = \dfrac{x}{\sin x} \cos x \to 1$이기 때문이다. $(0, \frac{1}{2}\pi)$에서 $\cot x$는 $\ln(\sin x)$의 도함수이므로, $u = x$, $\mathrm{d}v = \cot x \, \mathrm{d}x$, $v = \ln(\sin x)$로 두고 부분적분한다. 로그는 0에서 발산하므로 $[\varepsilon, \frac{1}{2}\pi]$에서 계산한 다음 $\varepsilon \to 0^+$로 보낸다.

$$\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}\pi} x \cot x \, \mathrm{d}x = \Big[x \ln(\sin x) \Big]_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}\pi} - \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin x) \, \mathrm{d}x.$$

위끝에서 $\ln(\sin \frac{1}{2}\pi) = \ln 1 = 0$이다. 따라서 경계항은 그냥 $-\varepsilon \ln(\sin \varepsilon)$이다.

> **생각해 보기** 왜 $\varepsilon \ln(\sin \varepsilon)$은 0으로 갈까? 소문항 (ii)는 $x \ln(\sin x)$가 아니라 $x \ln x$에 관한 것이다.

$s = \sin \varepsilon$으로 쓰자. $\varepsilon \to 0^+$일 때 이 값은 양수 쪽에서 0으로 간다. 그러면

$$\varepsilon \ln(\sin \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\sin \varepsilon} \cdot s \ln s.$$

첫 번째 인수는 1로 가고(잘 알려진 극한 $\sin \varepsilon / \varepsilon \to 1$), $s \ln s \to 0$은 소문항 (ii)에 의하여 성립한다. 따라서 경계항은 0으로 간다.

$\varepsilon \to 0^+$로 보내고 소문항 (i)을 이용하면

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi} x \cot x \, \mathrm{d}x = 0 - I = \tfrac{1}{2}\pi \ln 2.$$

검산

- 부호: 이 구간에서 $\ln(\sin x) \leq 0$이므로 I는 음수여야 하고, 실제로 $-\frac{1}{2}\pi \ln 2 \approx -1.0888$은 음수이다. 한편 $(0, \frac{1}{2}\pi)$에서 $x \cot x > 0$이고, 우리가 얻은 답은 양수이다.
- 크기: $x \cot x$는 길이가 $\frac{1}{2}\pi \approx 1.571$인 구간에서 1부터 0까지 감소하므로, 적분값이 약 1.09인 것은 그럴듯하다.
- 수치적으로, 중점 구적법(midpoint quadrature)으로 계산하면 $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} x \cot x \, \mathrm{d}x \approx 1.0887930$이 되어 $\frac{1}{2}\pi \ln 2 = 1.0887930\ldots$과 일치하고, $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin x) \, \mathrm{d}x \approx -1.08879$이다.

흔한 실수

- $u = 2x$로 바꿀 때 $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}u$에서 나오는 인수 $\frac{1}{2}$을 빠뜨리는 것. 그러면 $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin 2x) \, \mathrm{d}x = 2I$가 되어 아무 데로도 이어지지 않는다.
- 소문항 (iii)에서 0에서의 극한을 정당화하지 않고 $[x \ln(\sin x)]_0^{\frac{1}{2}\pi} = 0$이라고 쓰는 것. 그 극한이 바로 소문항 (ii)의 존재 이유이다.

STEP 너머

여기서 다룬 두 적분은 모두 **이상적분**(*improper integral*)이다. 피적분함수나 사용한 역도함수가 구간의 한 끝점에서 유계가 아니다. 이런 적분은 우리가 ε을 써서 한 것처럼 극한으로 정의된다. 해석학(analysis) 입문 강좌에서는 이를 엄밀하게 다루고, 그러한 극한이 언제 존재하는지 판정하는 방법을 제공한다. 문제의 "가정해도 좋다"라는 구절 뒤에 있는 것이 바로 이 판정법들이다. 같은 대칭 기법으로 $\int_0^{\pi/2} \ln(\tan x) \, \mathrm{d}x = 0$과 같은 훨씬 많은 적분을 계산할 수 있다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 이 모든 것의 바탕이 되는 극한과 적분의 이론을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.