풀이

STEP III 1991, 문제 6

순수수학 • 쌍곡 일차변환

STEP III 1991, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/91-s3-q6

이 문제는 *Beyond STEP*의 7.6 절 **쌍곡 회전과 상대성 이론**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch07/hyperbolic-rotations.html

핵심 아이디어

이 행렬은 회전행렬(rotation matrix)처럼 행동하지만, 원함수 대신 쌍곡선함수(hyperbolic function)가 들어 있다. 그리고 항등식 $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$과 cosh, sinh의 덧셈정리(addition formulae)가 모든 일을 해 준다. 기울기가 $\tanh v$인 방향을 벡터 $(\cosh v, \sinh v)$로 쓰면 T가 기울기에 미치는 효과가 분명해진다. 그것은 단지 "쌍곡각(hyperbolic angle)" v에 u를 더할 뿐이다. 각에 관한 조건은 두 직선 사이의 각의 탄젠트를 v_1과 v_2로 나타낸 다음, 무엇이 고정되어야 하는지 살펴보면 된다.

풀이

이 풀이 전체에서 $c = \cosh u$, $s = \sinh u$라 쓰자. 그러면 $c^2 - s^2 = 1$이고, $u > 0$이므로 $s > 0$이다. 변환(transformation)은 다음과 같다.

$$x' = cx + sy, \qquad y' = sx + cy.$$

쌍곡선

임의의 점에 대하여

$$\begin{aligned} x'^2 - y'^2 &= (cx + sy)^2 - (sx + cy)^2 \\ &= (c^2 - s^2)x^2 + 2csxy - 2csxy - (c^2 - s^2)y^2 \\ &= x^2 - y^2. \end{aligned}$$

따라서 T는 $x^2 - y^2$을 보존하고, $x^2 - y^2 = 1$ 위의 모든 점은 $x^2 - y^2 = 1$ 위의 점으로 옮겨진다. 곡선은 단지 자기 자신 안으로 옮겨지는 것이 아니라 빠짐없이 덮인다. u 대신 $-u$를 넣은 행렬이 T의 역행렬(inverse)이고(곱해 보고 $c^2 - s^2 = 1$을 이용하면 된다), 이 행렬 역시 $x^2 - y^2$을 보존한다. 그러므로 쌍곡선(hyperbola) 위의 모든 점은 쌍곡선 위의 어떤 점의 상이다. 곡선은 자기 자신으로 변환된다.

(사실 각 가지는 자기 자신으로 옮겨진다. $x \geq 1$이면 $|y| < x$이므로 $x' = cx + sy > (c - s)x = \mathrm{e}^{-u}x > 0$이다.)

원점을 지나는 불변직선

T는 선형(linear)이므로 원점을 원점으로 보내고, 방향이 $\mathbf{d}$이며 원점을 지나는 직선을 방향이 $T\mathbf{d}$이며 원점을 지나는 직선으로 보낸다. 따라서 $T\mathbf{d}$가 $\mathbf{d}$와 평행해야 한다. 즉 $\mathbf{d}$는 고유벡터(eigenvector)여야 한다. $\mathbf{d} = (1, m)$을 넣어 보자.

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c + sm \\ s + cm \end{pmatrix},$$

이것이 $(1, m)$과 평행할 필요충분조건은 $s + cm = m(c + sm)$, 즉 $s(1 - m^2) = 0$이다. $s \neq 0$이므로 $m = \pm 1$이다. (수직 방향 $(0, 1)$은 (s, c)로 옮겨지는데, 이것은 수직이 아니므로 새로운 것을 주지 않는다.) 두 직선은

$$\boxed{y = x \quad \text{그리고} \quad y = -x}$$

이고, 실제로 $T(1, 1) = \mathrm{e}^{u}(1, 1)$, $T(1, -1) = \mathrm{e}^{-u}(1, -1)$이다. 이 두 직선은 쌍곡선의 점근선(asymptote)이며, 이는 쌍곡선이 자기 자신으로 옮겨진다는 사실과 잘 맞는다.

기울기: $v' = v + u$

점 $\mathbf{p}$를 지나고 방향이 $\mathbf{d}$인 직선을 생각하자. 이 직선 위의 점은 $\mathbf{p} + t\mathbf{d}$이다. 선형성에 의해 그 상은 $T\mathbf{p} + tT\mathbf{d}$, 즉 $T\mathbf{p}$를 지나고 방향이 $T\mathbf{d}$인 직선이다. 따라서 직선의 위치는 상관없고 방향만이 중요하다.

기울기(gradient)가 $\tanh v$인 직선의 방향은 $(1, \tanh v)$이고, $\cosh v > 0$을 곱하면 방향

$(\cosh v, \sinh v)$로 쓸 수 있다. 그러면 덧셈정리에 의해

$$T\begin{pmatrix}\cosh v\\ \sinh v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cosh u\cosh v + \sinh u \sinh v\\ \sinh u \cosh v + \cosh u \sinh v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cosh(u+v)\\ \sinh(u+v)\end{pmatrix}$$

이다. 그러므로 상인 직선의 기울기는 $\tanh(v+u)$이다. tanh는 일대일(one-to-one)이므로 $\tanh v' = \tanh(v+u)$로부터

$$v' = v + u,$$

를 얻고, 이것이 보이려던 것이다. (기울기가 -1과 1 사이에 엄격히 있는 직선만 이렇게 쓸 수 있으며, 문제에서 $\tanh v$를 쓰는 까닭이 이것이다.)

같은 각

두 직선의 기울기가 m_1, m_2이고 $1 + m_1 m_2 \neq 0$이면, 두 직선 사이의 예각(acute angle) θ는 다음을 만족한다.

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|.$$

여기서는 $|m_1|, |m_2| < 1$이므로 $1 + m_1 m_2 > 0$이다. 즉 두 직선은 결코 수직이 아니고, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$이며, θ는 $\tan\theta$에 의해 정해진다.

> **생각해 보기** 이 공식은 $\tanh(v_1 - v_2)$처럼 보이지만 분모의 부호가 맞지 않는다. 그렇다면 이 식은 대신 무엇으로 정리되는가?

$m_i = \tanh v_i$라 놓고 분자와 분모에 $\cosh v_1 \cosh v_2 > 0$을 곱하면

$$\tan\theta = \frac{|\sinh v_1 \cosh v_2 - \cosh v_1 \sinh v_2|}{\cosh v_1 \cosh v_2 + \sinh v_1 \sinh v_2} = \frac{|\sinh(v_1 - v_2)|}{\cosh(v_1 + v_2)}.$$

변환된 직선은 $v_i' = v_i + u$를 가진다. 그 차는 변하지 않지만 합은 $2u$만큼 커지므로, 두 직선 사이의 각 θ'은 다음을 만족한다.

$$\tan\theta' = \frac{|\sinh(v_1 - v_2)|}{\cosh(v_1 + v_2 + 2u)}.$$

ℓ_1과 ℓ_2가 애초에 만나려면 $v_1 \neq v_2$여야 하므로 분자는 0이 아니다. 따라서

$$\theta = \theta' \iff \cosh(v_1 + v_2) = \cosh(v_1 + v_2 + 2u).$$

$\cosh a = \cosh b$일 필요충분조건은 $a = \pm b$이므로, 이는 $v_1 + v_2 = v_1 + v_2 + 2u$이거나 $v_1 + v_2 = -(v_1 + v_2 + 2u)$라는 뜻이다. 앞의 경우는 $u > 0$이므로 불가능하다. 그러므로 필요충분조건(necessary and sufficient condition)은

$$\boxed{v_1 + v_2 = -u}$$

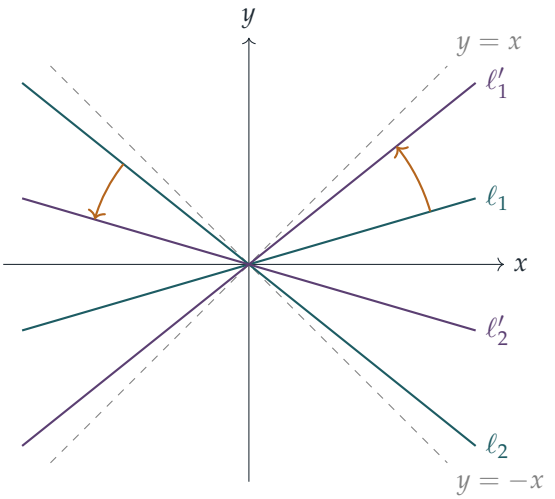
이고, 동치로 $v_1' + v_2' = u$이다.

직선들이 원점에서 만날 때의 그림

$v_1 + v_2 = -u$이면

$$v_1' = v_1 + u = -v_2, \qquad v_2' = v_2 + u = -v_1.$$

이다. 따라서 ℓ_1'의 기울기는 $-\tanh v_2$이고, 이는 ℓ_2를 x축에 대하여 대칭이동(reflection)한 것이다. 마찬가지로 ℓ_2'은 ℓ_1을 대칭이동한 것이다. 두 직선이 원점을 지나면, 변환된 직선 쌍은 원래 직선 쌍을 x축에 대하여 비춘 거울상일 뿐이며, 그래서 두 직선 사이의 각이 같은 것이다. 그림에서는 $u = 0.8$, $v_1 = 0.3$, $v_2 = -1.1$을 사용하였다. ℓ_1, ℓ_2의 기울기는 약 0.29와 -0.80이고, ℓ_1', ℓ_2'의 기울기는 0.80과 -0.29이다. 각 직선은 T가 늘이는 불변직선(invariant line) $y = x$ 쪽으로 돈다.



청록색 직선은 ℓ_1, ℓ_2이고, 자주색 직선은 그 상이다. 호박색 화살표는 $\ell_1 \to \ell_1'$과 $\ell_2 \to \ell_2'$을 나타낸다. 자주색 직선 쌍은 청록색 직선 쌍을 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

검산

- $u = 0.8$, $v_1 = 0.3$, $v_2 = -1.1$일 때 ℓ_1과 ℓ_2 사이의 각과 그 상들 사이의 각을 수치로 계산하면 둘 다 54.92°가 나온다. v_2를 조금 바꾸면 두 각이 달라진다.
- $u \to 0$이면 T는 항등변환(identity)이 되고, 조건은 $v_1 + v_2 = 0$이 된다. 이는 x축에 대하여 대칭인 두 직선이며, 항등변환은 당연히 이 대칭을 유지한다.
- $\cosh u + \sinh u = \mathrm{e}^u$이므로 $T(1,1) = \mathrm{e}^u(1,1)$은 손으로 쉽게 확인할 수 있다.

흔한 실수

- 쌍곡선이 자기 자신 **안으로** 옮겨진다는 것만 보이는 것. 역변환(inverse transformation)을 보면 빠지는 점이 없음을 알 수 있다.
- 각의 공식을 $\tanh(v_1 - v_2)$로 쓰는 것. $1 + m_1 m_2$의 $+$ 부호 때문에 분모에는 대신 $\cosh(v_1 + v_2)$가 나오며, T에 의해 변하는 것은 바로 **합**이다.
- $\cosh a = \cosh b$의 근 $v_1 + v_2 = v_1 + v_2 + 2u$를 빠뜨리고, 그것이 왜 불가능한지 말하지 않는 것.

STEP 너머

이 행렬은 특수상대성이론(special relativity)의 로런츠 부스트(Lorentz boost)로, x와 y가 각각 시간과 공간의 역할을 한다(빛의 속력이 1인 단위에서). 양 $x^2 - y^2$은 불변 간격(invariant interval)이고, $\tanh v$는 속도이며, v는 그 **신속도**(rapidity)이다. 결과 $v' = v + u$는 신속도가 더해진다는 뜻이며, 이는 상대론적 속도 덧셈 공식(relativistic velocity-addition formula)이 모습을 바꾼 것이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 특수상대성이론을 이런 방식으로 전개한다. 불변직선을 고유벡터의 관점에서 보려면 Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.