풀이

STEP III 1991, 문제 5

순수수학 • 극곡선과 상미분방정식

> **STEP III 1991, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s3-q5

핵심 아이디어

잠시 극좌표는 잊자. 이 방정식은 θ를 변수로 하는 상수계수 2계 선형 상미분방정식(linear second-order ODE with constant coefficients)일 뿐이다. 평소처럼 여함수(complementary function)와 특수해(particular integral)를 더하는 방법으로 풀고, $\theta = \frac{\pi}{2}$에서의 조건으로 상수를 정한 다음, 다시 기하로 돌아온다. $r = f(\theta)$로 주어진 곡선은 r이 0에서 시작하여 0에서 끝나고 그 사이에서 양수로 유지될 때 닫힌 고리(closed loop)가 되며, 그 넓이는 $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$이다.

풀이

미분방정식 풀기

보조방정식(auxiliary equation) $m^2 + 4 = 0$의 근은 $m = \pm 2\mathrm{i}$이므로, 여함수는

$$r = A\cos 2\theta + B\sin 2\theta.$$

이다. 특수해를 구할 때, $\sin 3\theta$는 여함수에 포함되지 않으므로 $r = k\sin 3\theta$로 놓아 본다. 그러면 $r'' = -9k\sin 3\theta$이고,

$$-9k\sin 3\theta + 4k\sin 3\theta = 5\sin 3\theta \quad\Longrightarrow\quad k = -1.$$

이다. 따라서 일반해(general solution)는

$$r = A\cos 2\theta + B\sin 2\theta - \sin 3\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -2A\sin 2\theta + 2B\cos 2\theta - 3\cos 3\theta.$$

이다. $\theta = \frac{\pi}{2}$에서 $\cos 2\theta = -1$, $\sin 2\theta = 0$, $\sin 3\theta = -1$, $\cos 3\theta = 0$이다. 두 조건은 다음과 같이 된다.

$$r = -A + 1 = 1 \quad \Longrightarrow \quad A = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -2B = -2 \quad \Longrightarrow \quad B = 1.$$

그러므로

$$r = \sin 2\theta - \sin 3\theta.$$

이다.

곡선은 닫힌 고리이다

r이 어디에서 0이 되고 부호가 어떤지 알아보기 위해, 항등식 $\sin P - \sin Q = 2\cos\frac{P+Q}{2}\sin\frac{P-Q}{2}$를 이용하여 인수분해한다.

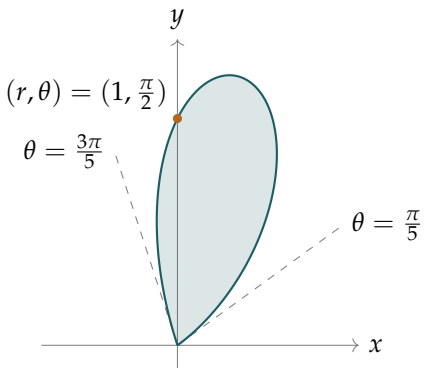
$$r = 2\cos\frac{5\theta}{2}\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right) = -2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{5\theta}{2}.$$

생각해 보기 인수분해한 꼴이 왜 "닫힌 고리" 문제를 해결해 주는가?

주어진 범위에서 두 인수의 부호를 쉽게 읽어 낼 수 있기 때문이다. $\frac{\pi}{5} \le \theta \le \frac{3\pi}{5}$에서

- $\frac{\theta}{2}$는 $\left[\frac{\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}\right]$에 속하므로 $\sin\frac{\theta}{2} > 0$이다.
- $\frac{5\theta}{2}$는 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$에 속하므로 $\cos\frac{5\theta}{2} \le 0$이고, 등호는 양 끝에서만 성립한다.

따라서 $\theta = \frac{\pi}{5}$와 $\theta = \frac{3\pi}{5}$에서 $r = 0$이고, 그 사이의 모든 θ에서 $r > 0$이다. 그러므로 곡선은 반직선 $\theta = \frac{\pi}{5}$를 따라 원점을 떠나 양의 r로 돌아 나간 뒤, 반직선 $\theta = \frac{3\pi}{5}$를 따라 원점으로 돌아온다. 그 사이의 각 반직선 $\theta =$ 상수는 곡선과 정확히 한 번 만나므로(그 θ에 대한 $r > 0$인 단 하나의 점에서), 곡선은 자기 자신과 교차하지 않는다. 즉 이 곡선은 하나의 닫힌 고리이며, 영역 $0 \le r \le \sin 2\theta - \sin 3\theta$, $\frac{\pi}{5} \le \theta \le \frac{3\pi}{5}$를 둘러싼다.



넓이

둘러싸인 넓이는

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_{\pi/5}^{3\pi/5} r^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_{\pi/5}^{3\pi/5} \left(\sin^2 2\theta - 2\sin 2\theta \sin 3\theta + \sin^2 3\theta\right)\mathrm{d}\theta.$$

이다. $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$와 $2\sin P \sin Q = \cos(P-Q) - \cos(P+Q)$를 이용하면

$$r^2 = 1 - \tfrac{1}{2}\cos 4\theta - \tfrac{1}{2}\cos 6\theta - \cos\theta + \cos 5\theta.$$

이다. $D = \sin\frac{2\pi}{5} - \sin\frac{\pi}{5}$로 놓자. $\left[\frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}\right]$에서 각 항을 적분하고, $\sin(x+2\pi) = \sin x$와 $\sin(\pi - x) = \sin x$를 이용하여 각 사인 값을 $\pm\sin\frac{\pi}{5}$ 또는 $\pm\sin\frac{2\pi}{5}$로 줄인다.

$$\begin{aligned}
\int 1\,\mathrm{d}\theta &= \tfrac{2\pi}{5},\\
\int -\tfrac{1}{2}\cos 4\theta\,\mathrm{d}\theta &= -\tfrac{1}{8}\left[\sin\tfrac{12\pi}{5} - \sin\tfrac{4\pi}{5}\right] = -\tfrac{1}{8}\left[\sin\tfrac{2\pi}{5} - \sin\tfrac{\pi}{5}\right] = -\tfrac{1}{8}D,\\
\int -\tfrac{1}{2}\cos 6\theta\,\mathrm{d}\theta &= -\tfrac{1}{12}\left[\sin\tfrac{18\pi}{5} - \sin\tfrac{6\pi}{5}\right] = -\tfrac{1}{12}\left[-\sin\tfrac{2\pi}{5} + \sin\tfrac{\pi}{5}\right] = \tfrac{1}{12}D,\\
\int -\cos\theta\,\mathrm{d}\theta &= -\left[\sin\tfrac{3\pi}{5} - \sin\tfrac{\pi}{5}\right] = -D,\\
\int \cos 5\theta\,\mathrm{d}\theta &= \tfrac{1}{5}\left[\sin 3\pi - \sin\pi\right] = 0.
\end{aligned}$$

(셋째 줄에서는 $\sin\frac{18\pi}{5} = \sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right) = -\sin\frac{2\pi}{5}$이고 $\sin\frac{6\pi}{5} = -\sin\frac{\pi}{5}$이다.) 모두 더하면

$$\int_{\pi/5}^{3\pi/5} r^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{2\pi}{5} + \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{12} - 1\right)D = \frac{2\pi}{5} - \frac{25}{24}D,$$

이고, 이를 반으로 나누면

$$\mathcal{A} = \frac{\pi}{5} - \frac{25}{48}D = \frac{\pi}{5} + \frac{25}{48}\left[\sin\frac{\pi}{5} - \sin\frac{2\pi}{5}\right],$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다.

검산

- $\theta = \frac{\pi}{2}$에서 $r = \sin\pi - \sin\frac{3\pi}{2} = 1$이고 $r' = 2\cos\pi - 3\cos\frac{3\pi}{2} = -2$이므로 조건을 만족한다.
- 수치적으로 $\mathcal{A} \approx 0.6283 - \frac{25}{48}(0.3633) \approx 0.4391$이다. $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용한 값과, 그려진 고리에 신발끈 공식(shoelace formula)을 적용한 값이 모두 0.43911이다. $\theta = \frac{\pi}{2}$에서 출발하여 미분방정식을 수치적으로 한 단계씩 풀어 나가면 $r = \sin 2\theta - \sin 3\theta$가 재현되고, 양 끝에서 r이 0으로 돌아옴이 확인된다.
- 답은 그럴듯하다. 고리는 $r \approx 1.22$까지 뻗어 나가고 $\frac{2\pi}{5}$의 각을 차지한다. 반지름이 1.22이고 중심각이 그 각인 부채꼴의 넓이는 약 0.93이고, 고리는 그 절반보다 조금 작은 부분을 채운다.

흔한 실수

- 특수해의 부호를 잘못 구하는 것: $(-9+4)k = 5$에서 $k = -1$이지 $+1$이 아니다.
- 양 끝점 사이에서 $r > 0$임을 보이는 것을 잊는 것. r의 영점이 두 개라는 것만으로는 고리가 되지 않는다. 그 사이에서 r의 부호가 바뀔 수도 있고, 그러면 $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$는 둘러싸인 넓이가 아니다.
- $\sin\frac{12\pi}{5}$나 $\sin\frac{18\pi}{5}$를 부주의하게 줄이는 것: 각각 $\pm\sin\frac{2\pi}{5}$이며, 부호가 중요하다.

STEP 너머

여기서 이 방법이 통하는 것은 방정식이 선형이기 때문이다. 모든 해는 하나의 특수해에 두 독립인 해 $\cos 2\theta$와 $\sin 2\theta$의 일차결합을 더한 것이고, 두 초기조건(initial condition)은 정확히 하나의 해를 골라낸다. 이것이 선형 상미분방정식의 존재성과 유일성 정리(existence and uniqueness theorem)로, 대학 1학년 과정에서 증명하고 끊임없이 사용한다. 이와 관련된 매력적인 사실로, 역제곱 힘(inverse-square force)을 받는 궤도에서는 $u = 1/r$이 $u'' + u =$ 상수를 만족하는데, 바로 이로부터 뉴턴(Newton)의 법칙이 원뿔곡선(conic section) 궤도를 이끌어 낸다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 선형 이론을 자세히 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.