풀이

STEP III 1991, 문제 4

순수수학 • 공간에서의 직선과 평면

STEP III 1991, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/91-s3-q4

핵심 아이디어

같은 관찰자(observer) O_1에서 본 서로 다른 두 시선(line of sight)은 모두 O_1을 지나므로 하나의 평면을 생성하고, P의 경로는 두 시선과 모두 만난다. O_1을 지나는 두 직선과 만나면서 O_1 자체는 지나지 않는 직선은 반드시 두 직선이 이루는 평면 위에 있다. O_2에 대해서도 마찬가지이므로, 경로는 두 평면이 만나는 교선이다. 이렇게 하면 꼬인 위치(skew)에 있는 듯한 네 직선에 관한 문제가 외적(cross product) 하나와 연립방정식(simultaneous equations) 한 쌍의 문제로 바뀐다.

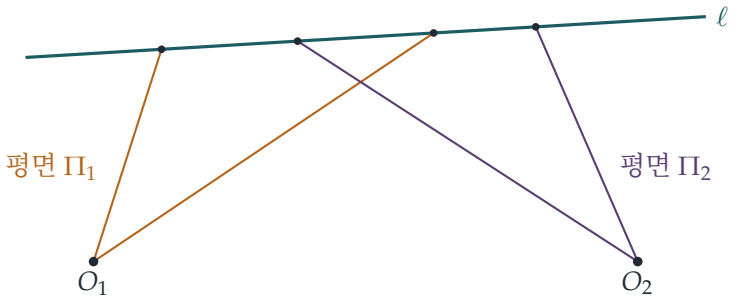
풀이

P가 움직이는 직선을 ℓ이라 하자. 네 시선의 방향은 다음과 같다.

$$\mathbf{d}_1 = (2,0,3), \qquad \mathbf{d}_1' = (0,3,4) \qquad (O_1\text{을 지남}),$$

$$\mathbf{d}_2 = (-3,1,3), \qquad \mathbf{d}_2' = (-4,2,5) \qquad (O_2\text{를 지남}).$$

각 시선은 관찰자와 P의 한 위치를 잇는 직선이므로, ℓ은 네 시선과 모두 만난다.



(개략도일 뿐이다. 호박색 두 시선과 ℓ은 한 평면 Π_1 위에 있고, 자주색 두 시선과 ℓ은 또 다른 평면 Π_2 위에 있다.)

ℓ이 각 관찰자를 지나는 평면 위에 있는 이유

먼저, ℓ은 O_1을 지날 수 없다. 만약 지난다면 $P \neq O_1$일 때마다 O_1에서의 시선은 ℓ 자신이 되므로, O_1에서의 서로 다른 두 시선이 존재할 수 없다. 마찬가지로 ℓ은 O_2를 지나지 않는다.

O_1에서의 두 시선은 O_1을 지나는 서로 다른 직선이므로 O_1에서만 만나고, 평면 Π_1을 생성한다. 직선 ℓ은 두 시선과 각각 한 점에서 만나는데, 두 시선의 유일한 공통점은 O_1이고 ℓ은 O_1을 지나지 않으므로 이 두 점은 서로 다르다. 두 점 모두 Π_1 위에 있으므로 ℓ 전체가 Π_1 위에 있다. 같은 방법으로 ℓ은 O_2를 지나고 $\mathbf{d}_2$와 $\mathbf{d}_2'$을 포함하는 평면 Π_2 위에 있다.

> **생각해 보기** ℓ이 특정한 평면 위에 놓이지 않고 각 시선과 한 점씩에서 교차하기만 할 수는 없을까?

직선 하나만 놓고 보면 그럴 수 있다. 그러나 여기서는 교점 중 두 개가 O_1을 지나는 직선 위에 있고, 서로 다른 두 점은 ℓ을 결정한다. 두 점이 모두 Π_1 위에 있으므로 ℓ에게는 다른 선택지가 없다. 두 점을 지나는 직선, 곧 Π_1 위에 있는 직선이 될 수밖에 없다.

평면 Π_1

Π_1의 법선벡터(normal)는

$$\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_1' = (2,0,3) \times (0,3,4) = (0-9,\ 0-8,\ 6-0) = (-9,-8,6),$$

이고 Π_1은 원점을 지나므로 다음과 같다.

$$\Pi_1 : \quad 9x + 8y - 6z = 0.$$

평면 Π_2

Π_2의 법선벡터는

$$\mathbf{d}_2 \times \mathbf{d}_2' = (-3,1,3) \times (-4,2,5) = (5-6,\ -12+15,\ -6+4) = (-1,3,-2),$$

이고 Π_2는 $O_2(8a,0,0)$을 지나므로 $-(x-8a)+3y-2z=0$, 즉 다음과 같다.

$$\Pi_2 : \quad x - 3y + 2z = 8a.$$

(간단한 검산: $(-3,1,3)\cdot(-1,3,-2) = 3+3-6 = 0$이고 $(-4,2,5)\cdot(-1,3,-2) = 4+6-10=0$이다.)

$a \neq 0$이라고 가정한다. 그렇지 않으면 두 관찰자가 일치한다. 그러면 O_2는 Π_1 위에 있지 않고($9\cdot 8a \neq 0$이므로) O_1은 Π_2 위에 있지 않으며, 이는 앞에서 말한 내용과 일치한다.

경로

법선벡터 $(-9,-8,6)$과 $(-1,3,-2)$는 평행하지 않으므로 Π_1과 Π_2는 한 직선에서 만나고, 그 직선은 ℓ이어야 한다. 이 직선의 방향은 두 법선벡터에 모두 수직이다.

$$(-9,-8,6)\times(-1,3,-2)=(16-18,\ -6-18,\ -27-8)=(-2,-24,-35),$$

따라서 방향으로 $(2,24,35)$를 택할 수 있다. 이 직선 위의 한 점을 찾기 위해 $y=0$으로 놓자. 그러면 방정식은 $9x=6z$와 $x+2z=8a$가 되므로 $x=\frac{2}{3}z$이고 $\frac{8}{3}z=8a$이다. 이로부터 $z=3a$, $x=2a$를 얻는다. 따라서 $(2a,0,3a)$는 ℓ 위에 있다. 당연히 이 점은 O_1에서의 첫 번째 시선 위에도 있다.

그러므로 P의 경로는

$$\boxed{\frac{x-2a}{2}=\frac{y}{24}=\frac{z-3a}{35}}$$

이다. 또는 이와 동치인 두 방정식 $9x+8y-6z=0$과 $x-3y+2z=8a$의 쌍으로 나타낼 수도 있다.

마지막으로, ℓ은 실제로 네 시선과 모두 관찰자가 아닌 점에서 만난다. ℓ을 $(2a+2\lambda,\ 24\lambda,\ 3a+35\lambda)$로 쓰면, 네 시선과 만나는 점은 각각

$$(2a,0,3a),\qquad (0,-24a,-32a),\qquad \left(\tfrac{80a}{37},\tfrac{72a}{37},\tfrac{216a}{37}\right),\qquad \left(\tfrac{56a}{25},\tfrac{72a}{25},\tfrac{36a}{5}\right)$$

이다.

> ? **생각해 보기** $a>0$일 때 두 번째 점은 y와 z가 음수이다. 이것이 문제가 될까?

시선은 직선 전체로 주어져 있고, $(0,-24a,-32a)$는 $x=0,\ y/3=z/4$를 만족한다. 우리는 직선만 사용했을 뿐 관찰자가 어느 쪽을 보고 있었는지는 사용하지 않았으므로 답은 그대로 유효하다. "시선"을 관찰자에서 출발하는 반직선(ray)으로 해석한다면, 이 관측은 O_1의 뒤쪽에 있다. 이는 주어진 자료의 특이한 점일 뿐 방법의 오류가 아니다.

검산

- 점 $(2a,0,3a)$와 방향 $(2,24,35)$를 두 평면의 방정식에 대입한다. $9(2)+8(24)-6(35)=18+192-210=0$이고 $2-72+70=0$이므로 방향이 두 평면에 모두 놓인다.
- $a=1$일 때 점 $\left(\frac{80}{37},\frac{72}{37},\frac{216}{37}\right)$은 $O_2+\frac{72}{37}(-3,1,3)$과 같고, $\frac{80/37-2}{2}=\frac{3}{37}=\frac{72/37}{24}$이다. 따라서 이 점은 시선과 경로 위에 모두 있다.
- 여러 a 값에 대해 네 교점을 모두 정확한 유리수 연산으로 확인하였다.

흔한 실수

- 시선 쌍의 교점을 구하려는 것: 서로 다른 시각에 서로 다른 관찰자에게서 나온 시선은 전혀 만나지 않을 수도 있다.
- Π_2가 원점이 아니라 O_2를 지난다는 사실을 잊는 것. 그러면 $= 8a$ 대신 $x - 3y + 2z = 0$을 얻게 된다.
- 외적의 부호 오류. 법선벡터를 두 방향벡터와 각각 내적하여 항상 다시 확인하라.

STEP 너머

공간에서 주어진 네 직선과 모두 만나는 직선은 몇 개일까? 일반적인 위치(general position)에 있는 네 직선에 대해서는 답이 2이다(복소수 범위에서 센 것이며, 실수 범위에서는 0일 수도 있다). 이는 열거기하학(enumerative geometry)의 고전적인 결과이며, 여기서의 네 직선은 두 개씩 짝지어 두 관찰자를 지나므로 특수한 경우이다. 같은 시선 평면 아이디어가 삼각측량(triangulation)과, 두 카메라로 3차원 점의 위치를 복원하는 스테레오 비전(stereo vision)의 에피폴라 기하학(epipolar geometry)의 바탕이 된다. 직선, 평면, 교점에 관한 선형대수학은 Strang, *Introduction to Linear Algebra*를 읽어 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.