풀이

STEP III 1991, 문제 3

순수수학 • 구간별로 정의된 함수와 역함수

STEP III 1991, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/91-s3-q3

핵심 아이디어

절댓값(modulus)은 안쪽 식의 부호가 바뀔 때 식이 바뀌는 함수일 뿐이다. 여기 있는 세 절댓값은 $x = -1, 0, 1$에서만 부호가 바뀌므로, 이 점들이 $x < 2$를 나누는 네 구간 각각에서 함수는 평범한 이차함수이다. 이 네 이차함수를 구하고 나면 모든 질문(극점, 변곡점, 연속성, 매끄러움, 역함수)은 단순한 포물선들과 그것들이 이어지는 방식에 관한 질문이 된다.

풀이

절댓값 없애기

안쪽 식을 인수분해하면 $x^2 - x = x(x-1)$, $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, $x^2 + x = x(x+1)$이다. 각각의 부호는 다음과 같다.

구간	$x^2 - x$	$x^2 - 1$	$x^2 + x$	$f(x)$
$x \le -1$	$+$	$+$	$+$	$x^2 - 4x - 1$
$-1 \le x \le 0$	$+$	$-$	$-$	$3x^2 + 1$
$0 \le x \le 1$	$-$	$-$	$+$	$1 - 5x^2$
$1 \le x < 2$	$+$	$+$	$+$	$x^2 - 4x - 1$

예를 들어 $-1 \le x \le 0$에서는

$$f(x) = 2(x^2 - x) + (1 - x^2) + 2(x^2 + x) = 3x^2 + 1,$$

이고, $0 \le x \le 1$에서는 $f(x) = -2(x^2 - x) + (1 - x^2) - 2(x^2 + x) = 1 - 5x^2$이다. 바깥쪽 두 구간에서는 세 안쪽 식이 모두 양수이고, $2(x^2 - x) + (x^2 - 1) - 2(x^2 + x) = x^2 - 4x - 1$이다. 구간의 끝점에서는 안쪽 식 하나가 0이 되므로 어느 쪽 식을 써도 옳다.

연속성과 미분가능성

f는 모두 연속인 $|\cdot|$와 다항식으로 만들어지므로, f는 $x < 2$에서 **모든 점에서 연속(continuous)**이다. 확인 삼아 보면, 이웃한 식들이 이음점에서 일치한다. $f(-1) = 4$, $f(0) = 1$, $f(1) = -4$.

미분가능성(differentiability)을 보려면 이음점에서 한쪽 도함수(one-sided derivative)를 비교한다. 네 조각의 도함수는 $2x - 4$, $6x$, $-10x$, $2x - 4$이다.

- $x = -1$에서: 왼쪽에서는 $2(-1) - 4 = -6$, 오른쪽에서는 $6(-1) = -6$이다. 둘이 같으므로 $f'(-1) = -6$이다.
- $x = 0$에서: 양쪽 모두 0이므로 $f'(0) = 0$이다.
- $x = 1$에서: 왼쪽에서는 -10, 오른쪽에서는 $2 - 4 = -2$이다. 둘이 다르므로 그래프는 $(1, -4)$에서 **꺾인 점(corner)**을 가진다.

따라서 f는 **모든 점에서 미분가능하지는 않다**. 정확히 $x = 1$에서만 미분가능하지 않다.

극점과 변곡점

단 한 점 $x = 0$을 제외하면 모든 조각에서 $f' < 0$이다.

- $x < -1$과 $1 < x < 2$: $x < 2$이므로 $f'(x) = 2x - 4 < 0$;
- $-1 < x < 0$: $f'(x) = 6x < 0$;
- $0 < x < 1$: $f'(x) = -10x < 0$.

f는 연속이고 각 조각에서 순감소하므로 $x < 2$ **전체에서 순감소(strictly decreasing)**한다. 특히 **극대점이나 극소점은 없으며**, 국소적인 것조차 없다.

> ? **생각해 보기** $f'(0) = 0$이니 $(0, 1)$은 극점(turning point)이 아닌가?

아니다. 왼쪽 조각 $3x^2 + 1$은 0에서 최솟값을, 오른쪽 조각 $1 - 5x^2$는 그곳에서 최댓값을 가지지만, 각 식이 적용되는 구간에서는 둘 다 감소한다. 따라서 f는 수평 접선을 가진 채 계속 내려가면서 $x = 0$을 지난다.

이제 오목·볼록을 보자. 각 조각의 이계도함수(second derivative)는 다음과 같다.

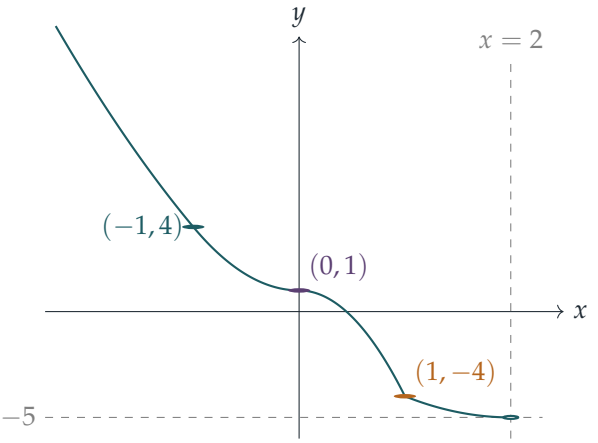
$$f'' = 2\ (x < -1), \qquad 6\ (-1 < x < 0), \qquad -10\ (0 < x < 1), \qquad 2\ (1 < x < 2).$$

- $x = 0$에서 그래프는 아래로 볼록(convex)에서 위로 볼록(concave)으로 바뀌고 그곳에서 접선을 가지므로, $(0, 1)$은 **정류 변곡점(stationary point of inflection)**이다.
- $x = -1$에서 f''는 2에서 6으로 뛰지만 양수로 유지되므로 변곡점이 아니다.

- $x = 1$에서 곡선은 위로 볼록에서 다시 아래로 볼록으로 바뀌지만, 그곳에서 꺾인 점을 가지며 접선이 없다. 보통의 정의(곡선을 가로지르는 접선)에 따르면 $(1, -4)$는 변곡점이 아니다. 답안에서 이 점을 명시적으로 밝혀 두는 것이 좋다.

개형 그리기

$x \to -\infty$일 때 $f(x) \to +\infty$이다. $x \to 2^-$일 때 $f(x) \to 4 - 8 - 1 = -5$이며, 이 값은 실제로 취해지지 않는다.



곡선은 줄곧 내려간다. $(0, 1)$에서 평평해져 수평 변곡점이 되고, $(1, -4)$에서 꺾이며 그곳에서 기울기가 -10에서 -2로 뛴다.

역함수

f는 $x < 2$에서 연속이고 순감소하며, 왼쪽으로 가면 $f \to \infty$, 오른쪽으로 가면 $f \to -5$이므로, $(-\infty, 2)$에서 $(-5, \infty)$로의 전단사(bijection)이다. 따라서 f^{-1}는 $x > -5$에서 정의된다. $y = f(x)$로 놓고, 각 조각을 그 조각이 덮는 치역에서 역으로 푼다.

- $x \le -1$, 치역 $y \ge 4$: $y = x^2 - 4x - 1 = (x-2)^2 - 5$이므로 $(x-2)^2 = y + 5$이다. 여기서 $x - 2 < 0$이므로 음의 제곱근을 택한다. $x = 2 - \sqrt{y+5}$.
- $-1 \le x \le 0$, 치역 $1 \le y \le 4$: $x^2 = (y-1)/3$이고 $x \le 0$이므로 $x = -\sqrt{(y-1)/3}$.
- $0 \le x \le 1$, 치역 $-4 \le y \le 1$: $x^2 = (1-y)/5$이고 $x \ge 0$이므로 $x = \sqrt{(1-y)/5}$.
- $1 \le x < 2$, 치역 $-5 < y \le -4$: 다시 $(x-2)^2 = y + 5$이고 $x - 2 < 0$이므로 $x = 2 - \sqrt{y+5}$.

변수 이름을 x로 바꾸면 다음과 같다.

$$\mathrm{f}^{-1}(x) = \begin{cases} 2 - \sqrt{x+5}, & -5 < x \le -4, \\ \sqrt{\frac{1-x}{5}}, & -4 \le x \le 1, \\ -\sqrt{\frac{x-1}{3}}, & 1 \le x \le 4, \\ 2 - \sqrt{x+5}, & x \ge 4. \end{cases}$$

공유하는 끝점에서 식들은 일치한다. 예를 들어 $x = 4$에서는 둘 다 -1이고, $x = -4$에서는 둘 다 1이다.

검산

- 특정 값 대입: $\mathrm{f}(\frac{1}{2}) = 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - 2 \cdot \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$이고, $1 - 5 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$이다. 또 $\mathrm{f}^{-1}(-\frac{1}{4}) = \sqrt{1.25/5} = \frac{1}{2}$이다.
- 직접 계산하면 $\mathrm{f}(-3) = 2 \cdot 12 + 8 - 2 \cdot 6 = 20$이다. 식으로는 $9 + 12 - 1 = 20$이고, $\mathrm{f}^{-1}(20) = 2 - \sqrt{25} = -3$이다.
- 수치적으로, 무작위로 고른 10^5개의 $x < 2$에 대해 $\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{f}(x)) = x$이고, 촘촘한 격자의 모든 점에서 함수가 감소하며, $x = 1$에서의 한쪽 기울기는 -10과 -2로 나온다.

흔한 실수

- $\mathrm{f}'(0) = 0$이라는 이유로 $(0, 1)$을 극대점이나 극소점이라고 하는 것. 각 포물선 자체의 꼭짓점이 그 식이 성립하는 구간의 가장자리에 있다면 그것은 의미가 없다.
- 역함수에서 제곱근의 부호를 잘못 고르는 것. 각 구간에서 x(또는 $x - 2$)의 부호가 이를 결정한다.
- 두 식이 이어지는 점은 반드시 미분가능하지 않은 점이라고 가정하는 것. $x = -1$과 $x = 0$에서는 기울기가 일치한다.

STEP 너머

구간별로 정의된 함수(piecewise-defined function)는 미분가능하지 않으면서 연속일 수 있고, 이계도함수가 연속이 아니면서 미분가능할 수도 있다(여기서 f''는 $x = -1$과 $x = 0$에서 뛴다). 역함수 정리(inverse function theorem)에 따르면 순단조(strictly monotonic) 연속함수는 연속인 역함수를 가지며, 그 역함수는 $\mathrm{f}' \neq 0$인 곳에서 미분가능하다. f^{-1}가 정확히 $\mathrm{f}'(0) = 0$에 대응하는 $x = 1$에서 수직 접선을 가진다는 점에 주목하라. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 이러한 아이디어를 꼼꼼하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.