풀이

STEP III 1991, 문제 2

순수수학 • 기하에서의 복소수

> **STEP III 1991, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s3-q2

핵심 아이디어

복소수(complex number) 하나는 길이의 비와 각을 동시에 담을 수 있다. 몫 $(z_1 - z_2)/(z_1 - z_3)$은 P_1에서 만나는 삼각형의 두 변의 길이의 비(절댓값(modulus))와 한 변에서 다른 변으로 돌아가는 회전(편각(argument))을 기록하며, 이 두 정보가 바로 SAS 닮음(similarity) 판정에 필요한 것이다. 조건을 행렬식(determinant)으로 바꾸고 나면, 각 소문항은 행렬식을 인수분해하는 문제이거나 비교할 삼각형 $Q_1Q_2Q_3$을 영리하게 고르는 문제로 귀결된다.

풀이

먼저 오식부터

문제에 인쇄된 대로라면 좌변의 분모는 $z_2 - z_3$이다. 그러나 이는 옳을 수 없다. $w_i = z_i$로 두어 두 삼각형이 똑같아지게 하자. 그러면 우변은 $(z_1 - z_2)/(z_1 - z_3)$이 되는데, $z_2 \neq z_1$이므로 이것은 좌변과 다르다. 의도된 조건, 그리고 행렬식과 맞아떨어지는 조건은

$$\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} = \frac{w_1 - w_2}{w_1 - w_3}. \qquad (*)$$

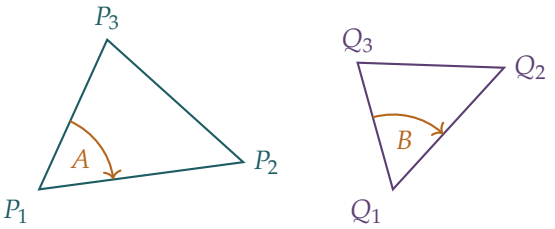
이다. 이것을 증명한다.

닮음 조건

삼각형 $P_1P_2P_3$의 P_1에서의 각을 A라 하자. 그러면 $0 < A < \pi$이다. 극형식(polar form)으로 쓰면

$$\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{P_1P_2}{P_1P_3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$

이다. 여기서 θ는 $\overrightarrow{P_1P_3}$의 방향에서 $\overrightarrow{P_1P_2}$의 방향으로 가기 위해 돌아야 하는 각이다. 따라서 $P_1 \to P_2 \to P_3$이 시계 반대 방향으로 돌면 $\theta = -A$이고(P_1P_3에서 시계 방향으로 돌아야 P_1P_2에 닿는다), 시계 방향으로 돌면 $\theta = +A$이다. 요약하면, 이 몫의 편각($(-\pi, \pi)$에서 잡는다)의 크기는 P_1에서의 각과 같고, 그 부호는 삼각형의 방향을 알려 준다. w들에 대해서도 Q_1에서의 각을 B라 하면 똑같은 사실이 성립한다.



같은 방향으로 닮음 $\Rightarrow (*)$. 두 삼각형이 $P_i \leftrightarrow Q_i$로 닮음이면, P_1과 Q_1에서 만나는 변들은 같은 비를 이루어 $P_1P_2/P_1P_3 = Q_1Q_2/Q_1Q_3$이고, 그곳의 각도 같아 $A = B$이다. 두 삼각형이 같은 방향으로 돌기 때문에 두 편각 $\mp A$와 $\mp B$는 같은 부호를 가지므로 서로 같다. 절댓값이 같고 편각이 같으므로 $(*)$가 성립한다.

$(*) \Rightarrow$ **같은 방향으로 닮음.** $(*)$가 성립하면, 절댓값을 비교하여 $P_1P_2/P_1P_3 = Q_1Q_2/Q_1Q_3$을 얻는다. 편각을 비교하면 $A = B$이고 부호도 같으므로, 두 삼각형은 같은 방향으로 돈다. 두 변의 길이가 비례하고 그 끼인각이 같으므로 SAS 조건이 성립하고, 따라서 두 삼각형은 $P_i \leftrightarrow Q_i$로 닮음이다. ($(*)$가 실수이면 두 세 점 모두 한 직선 위에 있고, 이 퇴화된 "삼각형"들도 역시 닮음이다.)

같은 사실을 보는 또 다른 방법이 있다. $(*)$는 상수 $a = (w_1 - w_2)/(z_1 - z_2) \neq 0$와 $b = w_1 - az_1$에 대하여 $w_i = az_i + b$라는 것과 정확히 같은 말이다. 사상 $z \mapsto az + b$는 $|a|$배 확대에 $\arg a$만큼의 회전과 평행이동을 합친 것이고, 이러한 사상은 모양과 방향을 보존한다.

행렬식 형태

분모를 없애면(점들이 서로 다르므로 두 분모 모두 0이 아니다) $(*)$는

$$(z_1 - z_2)(w_1 - w_3) - (z_1 - z_3)(w_1 - w_2) = 0.$$

과 동치이다. 전개하면 z_1w_1 항들이 소거되어

$$z_1(w_2 - w_3) - z_2(w_1 - w_3) + z_3(w_1 - w_2) = 0,$$

이 남는데, 이는 행렬식을 첫째 행을 따라 전개한 것이다. 따라서 $(*)$는 $\det = 0$과 같다.

각 소문항을 위해서는 행렬식을 다른 방법으로 계산해 두는 것이 도움이 된다. 둘째 열과 셋째 열에서 첫째 열을 빼면 행렬식은 변하지 않는다. 그런 다음 이제 $(1, 0, 0)$이 된 마지막 행

을 따라 전개하면

$$\det\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \\ w_2 - w_1 & w_3 - w_1 \end{pmatrix}. \qquad (\dagger)$$

이다.

소문항 (i)

$w_i = z_i^2$이면 (†)는

$$\begin{aligned}(z_2 - z_1)(z_3^2 - z_1^2) - (z_3 - z_1)(z_2^2 - z_1^2) &= (z_2 - z_1)(z_3 - z_1)[(z_3 + z_1) - (z_2 + z_1)] \\ &= (z_2 - z_1)(z_3 - z_1)(z_3 - z_2).\end{aligned}$$

이 된다. z_i들이 서로 다르므로 모든 인수가 0이 아니다. 따라서 행렬식은 결코 0이 아니며, 두 삼각형은 (위의 의미에서) 결코 닮음이 아니다.

소문항 (ii)

$w_i = z_i^3$이면 $z_j^3 - z_1^3 = (z_j - z_1)(z_j^2 + z_j z_1 + z_1^2)$을 이용하여

$$\begin{aligned}(z_2 - z_1)(z_3^3 - z_1^3) - (z_3 - z_1)(z_2^3 - z_1^3) &= (z_2 - z_1)(z_3 - z_1)[(z_3^2 + z_3 z_1) - (z_2^2 + z_2 z_1)] \\ &= (z_2 - z_1)(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)(z_1 + z_2 + z_3),\end{aligned}$$

를 얻는다. 이는 $z_3^2 - z_2^2 + z_1(z_3 - z_2) = (z_3 - z_2)(z_3 + z_2 + z_1)$이기 때문이다. 앞의 세 인수는 0이 아니므로, 행렬식은 $z_1 + z_2 + z_3 = 0$일 때, 그리고 그때에만 0이 된다. 즉 두 삼각형은 무게중심(centroid) $\frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$이 원점일 때, 그리고 그때에만 닮음이다.

소문항 (iii)

요령은 삼각형을 꼭짓점 이름만 바꾼 자기 자신과 비교하는 것이다. Q_1, Q_2, Q_3을 P_2, P_3, P_1로 잡자. 즉

$$w_1 = z_2, \qquad w_2 = z_3, \qquad w_3 = z_1.$$

? **생각해 보기** 왜 "정삼각형"이 이렇게 이름을 바꾸는 것과 관계가 있어야 할까?

$P_1 \leftrightarrow P_2, P_2 \leftrightarrow P_3, P_3 \leftrightarrow P_1$로 닮음이면 대응하는 변들은 공통의 비 $k > 0$를 가져야 한다.

$$\frac{P_2P_3}{P_1P_2} = \frac{P_3P_1}{P_2P_3} = \frac{P_1P_2}{P_3P_1} = k.$$

세 식을 곱하면 $k^3 = 1$이므로 $k = 1$이고, 세 변의 길이가 모두 같다. 역으로, 삼각형이 정삼각형(equilateral triangle)이면 중심에 대한 (알맞은 방향으로의) 120° 회전이

$P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_1$로 보낸다. 회전은 모양과 방향을 보존하므로, 이 삼각형은 이름을 바꾼 자기 자신과 같은 방향으로 닮음이다. 따라서

$P_1P_2P_3$이 정삼각형이다 $\iff$ 이 삼각형은 같은 방향으로 다음 삼각형과 닮음이다: $P_2P_3P_1$.

첫 부분에 의해, 우변은

$$0 = \det \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_3 & z_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = z_1(z_3 - z_1) - z_2(z_2 - z_1) + z_3(z_2 - z_3),$$

일 때, 그리고 그때에만 성립한다. 즉

$$z_1z_3 - z_1^2 - z_2^2 + z_1z_2 + z_2z_3 - z_3^2 = 0 \iff z_2z_3 + z_3z_1 + z_1z_2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2,$$

이고, 이것이 증명하려던 것이다.

검산

- 소문항 (ii): $z_1, z_2, z_3 = 1, \omega, \omega^2 (\omega = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}/3})$는 무게중심이 0이지만, 세제곱이 모두 1이므로 서로 다르지 않다. 대신 $z = 1,\ \mathrm{i},\ -1 - \mathrm{i}$를 시험해 보자. 무게중심은 0이고 세제곱은 $1,\ -\mathrm{i},\ 2 - 2\mathrm{i}$이다. 두 삼각형 모두 P_1P_2, P_2P_3, P_3P_1 순서로 변의 길이가 $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{5}$이고(이 경우에는 합동(congruent)이기까지 하다), 둘 다 시계 반대 방향으로 돈다.
- 소문항 (iii): $z = 0, 1, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$에 대하여 $1 + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$이므로 양변이 모두 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$이다.
- 무작위 삼각형 10^4개에 대한 컴퓨터 실험으로, $w_i = az_i + b$는 항상 $(*)$를 만족하지만 대칭된 삼각형 $w_i = a\bar{z}_i + b$는 결코 만족하지 않음을 확인했다. 또한 (†)의 두 인수분해와 정삼각형 판정 조건도 확인했다. 인쇄된 대로의 조건($z_2 - z_3$을 쓴 것)은 실제로 닮음인 경우 모두에서 성립하지 않았다.

흔한 실수

- 삼각형의 방향을 무시하는 것. 절댓값만으로는 대칭까지 포함한 닮음밖에 얻지 못한다. 거울상인 두 삼각형은 편각의 부호가 반대이므로 $(*)$를 만족하지 않는다.
- 소문항 (iii)에서 역을 빠뜨리는 것. 이름을 바꾼 닮음 논증은 양쪽 방향으로 모두 성립해야 하며, $k^3 = 1 \Rightarrow k = 1$ 단계는 k가 양의 실수라는 사실을 이용한다.

STEP 너머

사상 $z \mapsto az + b$는 평면에서 방향(orientation)을 보존하는 닮음변환이다. 이들은 가장 단순한 뫼비우스(Möbius) 변환이며, 네 점의 비조화비(cross-ratio)는 $(*)$를 일반화한다.

정삼각형 조건은 $(z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3)(z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3) = 0$으로도 인수분해되는데, 이는 z_1, z_2, z_3이 어느 한쪽 방향으로 정삼각형을 따라 돈다는 뜻이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 복소수에 대한 이러한 기하학적 사고방식을 아름답게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.