풀이

STEP III 1991, 문제 14

역학 • 용수철이 있는 원운동

STEP III 1991, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

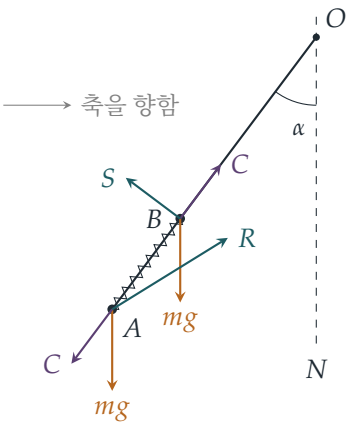
step.maths.org/questions/91-s3-q14

핵심 아이디어

모든 것이 같은 각속도(angular speed)로 ON을 축으로 하는 수평 원을 그리며 움직이므로, 각 질량에는 축을 향하는 크기 $\omega^2 r$의 알려진 가속도만 있고 그 밖의 가속도는 없다. 매끄러운(smooth) 막대에 끼워진 고리의 경우, 가장 깔끔한 식은 막대 방향의 식이다. 미지의 수직항력(normal reaction)이 그 식에서 사라지기 때문이다. 그다음 용수철의 힘이 고리와 A에 있는 입자를 이어 주고, 거기서 막대가 주는 반작용(reaction)의 방향이 k를 결정한다.

풀이

모형. 막대는 가볍고 매끄러우며, A와 B는 질량 m인 입자이고, 용수철은 B와 A 사이에서 막대를 따라 놓여 있다. $\alpha = \sin^{-1}\frac{3}{5}$로 놓으면 $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$이고 $\omega^2 = \frac{5g}{2a}$이다. $OB = x$라 하면 $AB = 2a - x$이다.



여기서 C는 용수철의 압축력(thrust)이다(용수철이 **압축되어**(compressed) 있음을 알게 될 것이므로, 용수철은 B를 O 쪽으로 밀고 A를 O에서 멀어지는 쪽으로 민다). S는 매끄러운 막대가 B에 작용하는 수직항력이고(막대에 수직이며 연직 평면 안에 있고, 방향은 앞으로 구한다), R은 막대가 A에 작용하는 반작용이다. ω가 일정하고 B가 막대에 대해 정지해 있으므로 연직 평면을 가로지르는 방향의 가속도는 없고, 따라서 모든 힘은 그 평면 안에 있다.

길이 OB

B는 반지름 $x\sin\alpha$인 수평 원을 그리며 움직이므로, 그 가속도는 ON을 향해 수평 방향으로 $\omega^2 x\sin\alpha$이다. 막대를 따라 $O \to A$ 방향(아래쪽이자 축에서 멀어지는 쪽)으로 분해하자. 가속도는 축을 향하고 막대는 연직선과 각 α를 이루므로, 이 방향의 가속도 성분은 $-\omega^2 x\sin\alpha\cdot\sin\alpha$이다.

용수철이 B에 작용하는 힘을 **장력**(tension) T(B를 A 쪽으로 당기는 힘)로 두고 부호는 저절로 정해지게 하는 것이 가장 간단하다. 훅의 법칙(Hooke's law)에 의해

$$T = \frac{kmg\left((2a-x)-a\right)}{a} = \frac{kmg(a-x)}{a}.$$

막대가 매끄러우므로 반작용 S는 막대 방향 성분이 없다. 따라서 OA 방향으로

$$mg\cos\alpha + \frac{kmg(a-x)}{a} = -m\omega^2 x\sin^2\alpha.$$

$\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\sin^2\alpha = \frac{9}{25}$, $\omega^2 = \frac{5g}{2a}$를 대입하면 우변은 $-\frac{9gx}{10a}\,m$이다. 양변을 mg로 나누고 $10a$를 곱하면

$$\begin{aligned} 8a + 10k(a-x) &= -9x \\ (10k+8)a &= (10k-9)x, \end{aligned}$$

따라서

$$OB = x = \frac{(10k+8)a}{10k-9},$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다. $x > a$임에 주목하자(답이 양수가 되려면 $10k > 9$이어야 한다). 그러므로 $AB = 2a - x < a$이고, 용수철은 압축되어 있으며 그 압축력은

$$C = -T = \frac{kmg(x-a)}{a} = \frac{17k\,mg}{10k-9},$$

이다. 여기서 $x - a = \dfrac{17a}{10k-9}$를 이용했다.

k 구하기

생각해 보기 왜 A에서의 반작용은 B에서의 반작용처럼 막대에 수직이지 않을까?

A에 있는 입자는 막대에 끼워진 것이 아니라 **붙어** 있으므로, 막대는 그것을 어느 방향으로든 밀거나 당길 수 있다. 매끄러움은 미끄러지는 고리에 작용하는 힘만 제한한다. 그래서 R을 성분으로 나누어 쓴다. R_h는 축을 향하는 수평 성분이고 R_v는 연직 위쪽 성분이다.

A는 반지름 $2a\sin\alpha = \frac{6a}{5}$인 원을 그리며 움직이므로, 그 가속도는 축을 향해 $\omega^2 \cdot \frac{6a}{5} = 3g$이다. 압축력 C는 A에 OA를 따라 O에서 멀어지는 방향으로 작용하므로, 축에서 멀어지는 성분 $C\sin\alpha$와 아래쪽 성분 $C\cos\alpha$를 가진다. 따라서

$$\text{수평 (축을 향하는 쪽):}\quad R_h - \tfrac{3}{5}C = 3mg,$$
$$\text{연직:}\quad R_v - mg - \tfrac{4}{5}C = 0.$$

$C = c\,mg$로 놓자. 반작용은 수평선과 각 $\tan^{-1}\frac{13}{21}$을 이루므로

$$\frac{R_v}{R_h} = \frac{1+\frac{4}{5}c}{3+\frac{3}{5}c} = \frac{13}{21} \implies 21 + \tfrac{84}{5}c = 39 + \tfrac{39}{5}c \implies 9c = 18, \quad c = 2.$$

($c > 0$이면 R_h와 R_v가 모두 양수이므로, 반작용은 실제로 위쪽이자 안쪽을 향하고 부호의 모호함은 없다.) 그러면

$$\frac{17k}{10k-9} = 2 \implies 17k = 20k - 18 \implies k = 6.$$

따라서 $k = 6$이고, 이때 $OB = \frac{68a}{51} = \frac{4}{3}a$로 a와 $2a$ 사이에 안전하게 놓이며, 압축력은 $C = 2mg$이다. (이때 A에 작용하는 반작용은 $R_h = \frac{21}{5}mg$, $R_v = \frac{13}{5}mg$이다.)

고리에 작용하는 반작용

생각해 보기 가장 적은 계산으로 S를 얻으려면 어느 방향으로 분해해야 할까?

막대에 수직인 방향이다. 그러면 용수철의 힘이 식에서 사라진다. 연직 평면 안에서 OA에 수직이고 **위쪽이자 축에서 멀어지는 쪽**을 향하는 단위 방향을 잡자. 이 방향은 수평선과 각 α를 이루므로, 바깥쪽 성분 $\cos\alpha$와 위쪽 성분 $\sin\alpha$를 가진다. B에 작용하는 반작용의 이 방향 성분을 S라 하자. 무게는 $-mg\sin\alpha$를 기여하고, 가속도(축을 향해 $\omega^2 x\sin\alpha$)는 $-\omega^2 x\sin\alpha\cos\alpha$를 기여한다. 따라서

$$S - mg\sin\alpha = -m\omega^2 x\sin\alpha\cos\alpha.$$

$x = \frac{4}{3}a$를 대입하면

$$m\omega^2 x\sin\alpha\cos\alpha = m\cdot\frac{5g}{2a}\cdot\frac{4a}{3}\cdot\frac{12}{25} = \frac{8}{5}mg, \qquad \text{따라서} \qquad S = \frac{3}{5}mg - \frac{8}{5}mg = -mg.$$

그러므로 막대와 고리 사이의 반작용의 크기는

$$\boxed{mg},$$

이고, 음의 부호는 이 반작용이 막대에 수직으로 **아래쪽이자 축을 향하는 쪽**으로 작용함을 말해 준다.

검산

- B에 대한 완전한 벡터 검산(수평 성분은 축을 향하는 쪽, 연직 성분은 위쪽): $C = 2mg$는 AO를 따라 작용하고 $S = mg$는 앞에서 구한 대로이다. 수평: $\frac{3}{5}(2mg) + \frac{4}{5}(mg) = 2mg$이고, $m\omega^2 x \sin\alpha = m \cdot \frac{5g}{2a} \cdot \frac{4a}{3} \cdot \frac{3}{5} = 2mg$이다. 연직: $\frac{4}{5}(2mg) - \frac{3}{5}mg - mg = 0$. 둘 다 균형을 이룬다.
- $k \to \infty$이면 용수철은 강체가 되고 $OB \to a$, 즉 자연 길이로 가는데, 마땅히 그래야 한다.
- 수치적으로, $m = g = a = 1$로 두고 k의 무작위 값 200개에 대해 OB 공식을 정확히 확인했으며, 각 $\tan^{-1}\frac{13}{21}$은 $k = 6$에서만 나왔고 $|S| = 1.0$을 얻었다. 작은 변위에서 시작해 막대를 따른 B의 운동을 단계적으로 계산하면 $x \approx 1.3333$ 근처에 머문다.

흔한 실수

- 용수철이 늘어나 있다고 가정했다가 $x > a$를 보고 당황하는 것. 장력의 부호는 계산에서 저절로 나오게 하라.
- A에서의 반작용이 막대에 수직이라고 생각하는 것. 그런 제한은 미끄러지는 고리에만 있다.
- 원운동의 반지름으로 $x\sin\alpha$ 대신 x를 쓰는 것.

STEP 너머

막대와 함께 회전하는 좌표계에서 B는 바깥쪽으로 "원심력"(centrifugal force) $m\omega^2 r$을 느끼고, 막대 방향의 식은 평범한 평형 문제가 된다. 이 관점을 더 밀고 나가면 유효 퍼텐셜(effective potential), 코리올리 힘(Coriolis force)(여기서는 B가 막대를 따라 움직이자마자 막대의 반작용과 균형을 이룬다), 그리고 평형의 안정성(stability)에 이른다. $x = \frac{4}{3}a$는 안정한가? Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 비관성 좌표계(non-inertial frame)와 회전하는 계를 정확히 이 수준에서 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.