풀이

STEP III 1991, 문제 13

역학 • 천장과 충돌하는 포물체

STEP III 1991, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

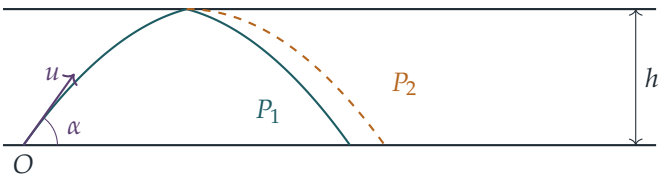
step.maths.org/questions/91-s3-q13

핵심 아이디어

천장이 매끄러우므로(smooth) 수평 속도 $u\cos\alpha$는 결코 변하지 않고, 모든 수평 도달 거리(range)는 $u\cos\alpha$에 비행 시간을 곱한 값일 뿐이다. 실제로 계산할 것은 모두 연직 운동에 있으며, 에너지 방정식(energy equation)을 쓰면 천장에서의 연직 속력이 곧바로 나온다. 탄성 충돌(elastic impact) 뒤에는 입자가 올라간 과정을 거꾸로 재생한 것처럼 정확히 그대로 내려오고, 비탄성 충돌(inelastic impact) 뒤에는 정지 상태에서 그냥 떨어진다.

풀이

두 입자를 공기 저항(air resistance) 없이 중력만 받으며 자유롭게 움직이는 질점(point mass)으로 모형화한다. $u=\sqrt{8gh}$, $s=\sin\alpha$, $c=\cos\alpha$로 쓴다. O에서 수평 방향으로 x, 연직 위쪽으로 y를 잡는다.



천장에 도달하기

처음 연직 속도는 us이고, 올라가는 동안

$$\dot{y}^2 = u^2s^2 - 2gy = 8gh\,s^2 - 2gy.$$

입자가 높이 h에 도달하려면 그곳에서 $\dot{y}^2 \geq 0$이어야 한다. 즉 $8ghs^2 \geq 2gh$이므로 $s^2 \geq \frac{1}{4}$이다. α는 예각이므로 $s > 0$이고, 이 조건은 $\sin\alpha \geq \frac{1}{2}$, 곧 $\alpha \geq \frac{1}{6}\pi$이다. ($\alpha = \frac{1}{6}\pi$일 때는 정확히 천장을 스치기만 한다.) 천장에 도달했을 때 그곳에서의 위쪽 속력은

$$w = \sqrt{8ghs^2 - 2gh} = \sqrt{2gh}\,\sqrt{4s^2 - 1}.$$

P_1의 도달 거리

올라가는 동안 연직 속도는 비율 g로 us에서 w까지 일정하게 줄어들므로, 천장까지 걸리는 시간은

$$t_1 = \frac{us - w}{g}.$$

? **생각해 보기** P_1이 천장에서 다시 내려오는 데 시간이 얼마나 걸리는가?

충돌은 완전 탄성이고 천장은 매끄러우므로, 연직 속도는 아래쪽으로 w가 되고 수평 속도는 변하지 않는다. 그러면 천장에서 내려오는 연직 운동은 올라가는 연직 운동을 시간을 거꾸로 돌린 것과 같다(높이 h에서 바닥 쪽으로 속력 w로 출발하여 g로 가속한다). 따라서 입자는 다시 시간 t_1이 걸려 연직 속력 us로 바닥에 닿는다. 직접 확인하면, 연직 속력이 비율 g로 w에서 $\sqrt{w^2 + 2gh} = us$까지 커진다.

전체 비행 시간은 $2t_1$이므로 도달 거리는

$$\begin{aligned} R_1 &= uc \cdot \frac{2(us - w)}{g} = \frac{2\sqrt{8gh}\,c}{g}\left(2\sqrt{2gh}\,s - \sqrt{2gh}\sqrt{4s^2 - 1}\right) \\ &= \frac{2\sqrt{8gh}\sqrt{2gh}}{g}\,c(2s - \sqrt{4s^2 - 1}) = 8h\cos\alpha\left(2\sin\alpha - \sqrt{4\sin^2\alpha - 1}\right), \end{aligned}$$

이다. 여기서 $us = \sqrt{8gh}\,s = 2\sqrt{2gh}\,s$와 $\sqrt{8gh}\sqrt{2gh} = 4gh$를 이용했다. 이것이 구하는 도달 거리이다.

P_2의 도달 거리와 차 D

P_2는 천장까지 같은 경로를 따라가며 시간 t_1이 걸린다. 충돌이 완전 비탄성이므로 연직 속도는 0이 되고, 천장이 매끄러우므로 수평 속도는 여전히 uc이다. 그다음 정지 상태에서 높이 h를 떨어지며, 이때 걸리는 시간은 $\sqrt{2h/g}$이다. 따라서

$$R_2 = uc\left(t_1 + \sqrt{\tfrac{2h}{g}}\right), \qquad R_2 - R_1 = uc\left(\sqrt{\tfrac{2h}{g}} - t_1\right).$$

이제

$$t_1 = \frac{\sqrt{2gh}\,(2s - \sqrt{4s^2 - 1})}{g} = \sqrt{\frac{2h}{g}}\,(2s - \sqrt{4s^2 - 1})$$

이고 $uc\sqrt{2h/g} = \sqrt{8gh}\sqrt{2h/g}\,c = 4hc$이므로

$$R_2 - R_1 = 4h\cos\alpha\left(1 - 2\sin\alpha + \sqrt{4\sin^2\alpha - 1}\right).$$

이 값은 $\frac{1}{6}\pi < \alpha < \frac{1}{2}\pi$에서 양수이다. $s > \frac{1}{2}$이면 $(2s-1)^2 = 4s^2 - 1 - 2(2s-1) < 4s^2 - 1$이므로 $2s - 1 < \sqrt{4s^2-1}$이기 때문이다. 따라서 P_2가 언제나 더 멀리 떨어지며(탄성 반발이 P_1을 더 빠르게 아래로 내던진다),

$$D = 4h\cos\alpha\left(1 - 2\sin\alpha + \sqrt{4\sin^2\alpha - 1}\right).$$

D의 최대화

$\frac{1}{6}\pi \le \alpha < \frac{1}{2}\pi$에서 $f(\alpha) = D/(4h) = c(1-2s) + cr$로 놓는다. 여기서 $r = \sqrt{4s^2-1}$이다. $f(\frac{1}{6}\pi) = 0$이고, $\alpha \to \frac{1}{2}\pi$일 때 ($c \to 0$이므로) $f \to 0$이며, 그 사이에서는 $f > 0$임에 주목한다. $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{4sc}{r}$를 이용하여 미분하면

$$f'(\alpha) = -s(1-2s) - 2c^2 - sr + \frac{4sc^2}{r}.$$

$c^2 = 1 - s^2$를 대입하고 ($\alpha > \frac{1}{6}\pi$에서) $r > 0$을 곱하면

$$\begin{aligned} rf'(\alpha) &= (4s^2 - s - 2)\,r - sr^2 + 4s(1-s^2) \\ &= (4s^2 - s - 2)\,r - s(8s^2 - 5). \end{aligned}$$

$\alpha = \frac{1}{4}\pi$에서 $s = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $r = 1$이므로 $(2 - \frac{1}{\sqrt{2}} - 2) - \frac{1}{\sqrt{2}}(4-5) = 0$이다. 따라서 $\alpha = \frac{1}{4}\pi$는 정류점(stationary point)이다.

? 생각해 보기 이것이 다른 정류점이 아니라 최댓값임을 어떻게 아는가?

모든 정류점에서 $(4s^2 - s - 2)r = s(8s^2 - 5)$이다. 양변을 제곱하고 $r^2 = 4s^2 - 1$을 이용하여 전개하고 인수분해하면

$$(4s^2 - s - 2)^2(4s^2 - 1) - s^2(8s^2 - 5)^2 = -2(2s^2 - 1)(8s^3 - s^2 - 2s - 2),$$

이므로 모든 정류점은 $s^2 = \frac{1}{2}$ 또는 $q(s) = 8s^3 - s^2 - 2s - 2 = 0$을 만족한다. $[\frac{1}{2}, 1]$에서 $q'(s) = 24s^2 - 2s - 2 > 0$이므로 q는 증가한다. $q(0.8) = -0.144 < 0 < 0.0985 = q(0.82)$이므로 이 구간에서 q의 유일한 근은 $(0.8, 0.82)$에 있다. 그런데 이러한 s에 대하여

$$4s^2 - s - 2 < 4(0.82)^2 - 0.8 - 2 < 0, \qquad 8s^2 - 5 > 8(0.8)^2 - 5 > 0,$$

이므로 좌변 $(4s^2 - s - 2)r$는 음수이고 우변 $s(8s^2 - 5)$는 양수이다. 즉 이 근은 제곱하는 과정에서 생긴 것이며 정류점이 아니다. 따라서 $(\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi)$에서 정류점은 $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ 하나뿐이다. f는 연속이고 구간 안에서 양수이며 양 끝에서 0이거나 0으로 다가가므로 구간 안에서 최댓값을 가지고, 그 최댓값은 이 정류점에서 나타나야 한다. 따라서 D는 $\alpha = \frac{1}{4}\pi$일 때 가장 크며,

$$D_{\max} = 4h \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1 - \sqrt{2} + 1) = 4h(\sqrt{2} - 1).$$

검산

- $\alpha = \frac{1}{6}\pi$에서는 입자가 천장에 겨우 닿으므로 두 입자의 결과가 일치해야 한다. 실제로 $D = 0$이고, $R_1 = 8h \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}\,h$는 통상적인 도달 거리 $u^2 \sin 2\alpha / g$와 같다.
- $h = 1.7\,\mathrm{m}$로 두고 $\alpha = 1$에서 두 운동을 수치적으로 단계별 계산하면 $R_1 \approx 2.420\,\mathrm{m}$, $D \approx 2.464\,\mathrm{m}$로 공식과 일치한다. α에 대해 촘촘히 탐색하면 $D/(4h)$의 최댓값은 $\alpha = 0.78540 \approx \frac{1}{4}\pi$에서 나타나며 그 값은 $0.41421 \approx \sqrt{2} - 1$이다.

흔한 실수

- $h = ust - \frac{1}{2}gt^2$를 t_1에 대해 풀고 큰 근을 택하는 것. 큰 근은 천장이 없을 때 입자가 내려오면서 높이 h를 지나는 시각이다.
- $D = R_1 - R_2$로 쓰는 것. 이 값은 음수이다. 비탄성 입자가 더 멀리 떨어진다.
- $f'(\frac{1}{4}\pi) = 0$에서 멈추고 이 정류점이 최댓값임을 보이지 않는 것.

STEP 너머

P_1에 대한 시간 역전(time reversal) 논법은 깊은 사실을 처음 엿보게 해 준다. 보존력(conservative force)만 작용할 때 뉴턴(Newton)의 법칙은 시간을 거꾸로 돌려도 똑같아 보이며, 완전 탄성 충돌은 이 대칭성을 보존하지만 (에너지를 잃는) 비탄성 충돌은 이를 깨뜨린다. 0과 1 사이의 반발 계수(coefficient of restitution)를 쓰면 여기서 구한 두 도달 거리 사이를 보간하게 된다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 관점에서 충돌과 에너지 보존을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.