풀이

STEP III 1991, 문제 12

역학 • 곡선 위의 운동

STEP III 1991, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/91-s3-q12

핵심 아이디어

입자는 타원에 묶여 있으므로, 그 위치는 하나의 매개변수(parameter) θ만으로 완전히 기술된다. 위치 벡터를 두 번 미분하고 가속도를 안쪽 단위 법선(inward unit normal)에 사영(projection)한다. 이때 $\ddot{\theta}$ 항들은 접선 방향을 향하므로 사라진다. 둘째 부분에서는 수직항력(normal reaction)이 0으로 떨어질 때 입자가 면을 떠나며, 관이 매끄러우므로 에너지 보존(energy conservation)으로 모든 점에서의 속력을 구할 수 있다.

풀이

법선 가속도

입자를 매끄러운 곡선 위를 움직이는 점으로 모형화한다. 따라서 작용하는 힘은 아래쪽으로 향하는 무게 mg와 관이 주는 수직항력 R뿐이다.

위치는 $\mathbf{r} = (a\cos\theta,\ b\sin\theta)$이다. 연쇄 법칙(chain rule)을 써서 시간에 대해 미분하면

$$\dot{x} = -a\sin\theta\,\dot{\theta}, \qquad \dot{y} = b\cos\theta\,\dot{\theta},$$
$$\ddot{x} = -a\sin\theta\,\ddot{\theta} - a\cos\theta\,\dot{\theta}^2, \qquad \ddot{y} = b\cos\theta\,\ddot{\theta} - b\sin\theta\,\dot{\theta}^2.$$

접선 방향은 $(-a\sin\theta,\ b\cos\theta)$이므로, 법선 방향 하나는 $(b\cos\theta,\ a\sin\theta)$이다(두 벡터의 내적(dot product)이 0이다). $\theta = 0$에서 이 벡터는 $(b, 0)$이고 타원의 바깥쪽을 향하므로, 안쪽 단위 법선은

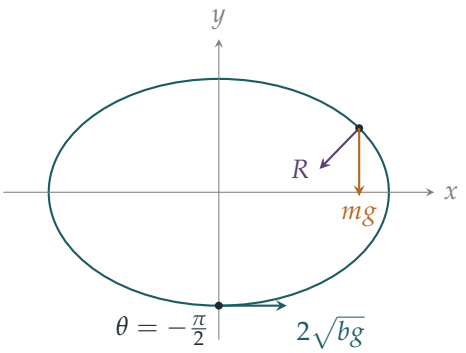
$$\mathbf{n} = -\frac{(b\cos\theta,\ a\sin\theta)}{D}, \qquad D = \sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}.$$

따라서 안쪽 법선 방향의 가속도는

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n} &= -\frac{1}{D}\Big[b\cos\theta(-a\sin\theta\,\ddot\theta - a\cos\theta\,\dot\theta^2) + a\sin\theta(b\cos\theta\,\ddot\theta - b\sin\theta\,\dot\theta^2)\Big]\\ &= -\frac{1}{D}\Big[-ab\,\dot\theta^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\Big] = \frac{ab\,\dot\theta^2}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}},\end{aligned}$$

이다. 두 $\ddot\theta$ 항이 서로 상쇄되기 때문이다. 이것이 구하려던 결과이다.

면을 떠나는 순간



가장 낮은 점은 $\theta = -\frac{\pi}{2}$이고, 이때 $y = -b$이다. 관이 매끄러우므로 수직항력은 일을 하지 않고, 에너지가 보존된다. 매개변수가 θ인 점에서의 속력을 v라 하면

$$\tfrac12 mv^2 + mgb\sin\theta = \tfrac12 m(4bg) - mgb \quad\Longrightarrow\quad v^2 = 2gb(1-\sin\theta).$$

첫째 부분에서 $v^2 = \dot x^2 + \dot y^2 = D^2\dot\theta^2$이므로 $\dot\theta^2 = v^2/D^2$이다.

이제 안쪽 법선 $\mathbf{n}$ 방향으로 힘을 분해한다. 수직항력 R은 $\mathbf{n}$ 방향으로 작용한다(입자가 안쪽에 있으므로 관은 입자를 안쪽으로 밀고, 접촉하는 동안 $R \ge 0$이다). 무게는 $(0,-mg)$이고, 그 $\mathbf{n}$ 방향 성분은 $(0,-mg)\cdot\mathbf{n} = mga\sin\theta/D$이다. 뉴턴(Newton)의 제2법칙에 의해

$$R + \frac{mga\sin\theta}{D} = \frac{m\,ab\,\dot\theta^2}{D} = \frac{m\,ab\,v^2}{D^3}, \qquad \text{따라서} \qquad R = \frac{ma}{D^3}\left(bv^2 - g\sin\theta\,D^2\right).$$

생각해 보기 무게의 성분이 왜 음의 부호가 아니라 $+mga\sin\theta/D$일까?

위쪽 절반($\sin\theta > 0$)에서는 안쪽 법선이 아래 방향 성분을 가지므로, 연직 원운동의 꼭대기에서와 마찬가지로 그곳에서는 중력이 입자를 안쪽으로 끌어당기는 데 도움을 준다. R과 무게의 이 성분이 함께 구심 가속도(centripetal acceleration)를 제공한다.

이제 $a = \frac32 b$, $v^2 = 2gb(1-\sin\theta)$를 대입하고 $s = \sin\theta$라 쓰자. 그러면

$$D^2 = \tfrac94 b^2 s^2 + b^2(1-s^2) = b^2(1+\tfrac54 s^2),$$

이므로

$$bv^2 - g\sin\theta\, D^2 = gb^2\left[2(1-s) - s(1+\tfrac{5}{4}s^2)\right] = -\tfrac{1}{4}gb^2(5s^3+12s-8).$$

$ma/D^3 > 0$이므로 R의 부호는 $-(5s^3+12s-8)$의 부호와 같다.

입자는 R이 처음으로 0이 되는 곳에서 면을 떠난다. 함수 $p(s) = 5s^3+12s-8$은 $p'(s) = 15s^2+12 > 0$이므로 순증가(strictly increasing)하고, $p(-1) = -25 < 0$, $p(1) = 9 > 0$이다. 따라서 p는 $(-1,1)$에서 정확히 하나의 근을 가진다. 입자가 가장 낮은 점에서 올라감에 따라 s는 -1부터 증가하고, s가 그 근에 이를 때까지 $R > 0$이다. 또한 모든 $s < 1$에 대해 $v^2 = 2gb(1-s) > 0$이므로, 입자는 그 점에 이를 때 여전히 관을 따라 올라가고 있다. 그러므로 R이 처음으로 0이 되어 입자가 면을 떠나는 점은

$$5\sin^3\theta + 12\sin\theta - 8 = 0,$$

을 만족하는 점이고, 이것이 구하려던 것이다. 수치적으로는 $\sin\theta \approx 0.584$이므로, 입자는 축의 높이보다 조금 위에서 면을 떠난다.

검산

- $a = b = r$이면 법선 가속도는 $r\dot{\theta}^2 = v^2/r$가 되어, 익숙한 원운동의 결과와 같다.
- 가장 낮은 점에서 $v^2 = 4bg$이고 $R = m\left(\frac{bv^2}{a^2} + g\right)$이므로 양수이다(그곳의 곡률 반지름(radius of curvature)은 a^2/b이다). 이는 $p(-1) = -25 < 0$과 일치한다.
- $b = 1$, $a = 1.5$, $g = 9.81$로 두고 가장 낮은 점에서부터 θ에 대한 운동 방정식을 단계별로 수치 적분했다. 수직항력은 $\sin\theta \approx 0.58379$에서 처음으로 0이 되었으며, 이는 삼차방정식의 근 0.58377과 일치한다($\theta \approx 35.7^\circ$).

흔한 실수

- θ를 극각(polar angle)으로 여기는 것. $a = b$가 아니면 점 $(a\cos\theta, b\sin\theta)$는 x축에서 각 θ만큼 떨어진 곳에 있지 않으며, 법선도 반지름 방향이 아니다.
- 법선 가속도로 v^2/b나 v^2/a를 쓰는 것. 타원에서는 곡률 반지름이 점마다 달라지며, 이것이 바로 첫째 부분에서 계산하는 내용이다.
- 무게의 법선 성분의 부호를 잘못 잡는 것. 그러면 삼차식이 $5s^3 - 4s + \ldots$로 바뀌어 의미 있는 근이 나오지 않는다.

STEP 너머

첫째 부분은 법선 가속도에 대한 공식 v^2/ρ의 특수한 경우이며, 여기서 ρ는 곡률 반지름이다. 실제로 이 타원에서는 $\rho = D^3/(ab)$이다. 가속도를 접선 성분과 법선 성분으로 나누는 것(프레네 틀(Frenet frame))은 대학 1학년 역학과 미분기하학에서 표준적인 내용이다. 구속 조건을 하나의 좌표 θ로 다루는 방법은 자연스럽게 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)으로 이어진다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 구속된 운동과 극좌표 및 내재 좌표(intrinsic coordinates)를 잘 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.