풀이

STEP III 1991, 문제 11

역학 • 강체의 평형

STEP III 1991, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

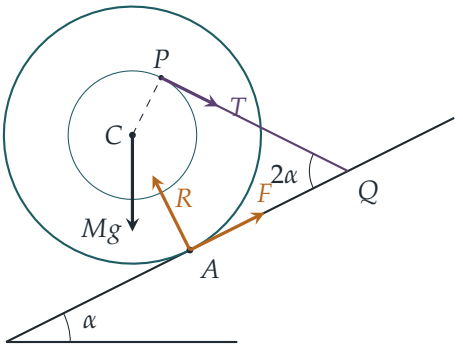
step.maths.org/questions/91-s3-q11

핵심 아이디어

원기둥(cylinder)은 네 힘, 즉 무게, 수직항력(normal reaction), 접촉점에서의 마찰력(friction), 줄의 장력(tension)을 받아 평형(equilibrium) 상태에 있는 강체(rigid body)이다. 이 가운데 무게와 수직항력은 원기둥의 중심을 지나므로, 중심에 대한 모멘트(moment)를 구하면 마찰력과 장력이 곧바로 연결된다. 그다음 빗면에 평행한 방향과 수직인 방향으로 힘을 분해하면 마찰력과 수직항력을 얻고, 나머지는 부등식 $F \leq \mu R$가 해결해 준다. 둘째 부분에서 원기둥은 줄을 무엇이 붙잡고 있는지 알지 못하므로 장력은 변하지 않고, 우리는 입자(particle)만 살펴보면 된다.

풀이

원기둥을 질량중심(centre of mass)이 그 중심 C인 균일한 강체로, 줄을 가볍고 늘어나지 않는 것으로, 둘째 물체를 입자로 모형화한다. 빗면과의 접촉점을 A라 하고, 줄의 장력을 T라 하자. 줄이 홈(groove)에 감겨 있으므로 줄의 풀린 부분 PQ는 P에서 홈에 접하고, 따라서 그 작용선(line of action)은 C로부터 수직 거리 a만큼 떨어져 있다. 그림에서 Q는 A보다 빗면 위쪽에 있고, 줄은 원기둥을 P에서 Q 쪽으로, 즉 빗면 위쪽이면서 빗면을 향하는 방향으로, 빗면과 각 2α를 이루며 당긴다.



점선으로 그린 반지름 CP는 길이가 a이고 줄에 수직이다. 원기둥에 작용하는 마찰력을 F라 하고, 빗면 위쪽 방향을 양의 방향으로 잡는다.

원기둥: $\mu \geq \frac{1}{3}\tan\alpha$ 보이기

C에 대한 모멘트. 무게는 C에 작용하고 수직항력은 AC를 따라 작용하므로, 둘 다 C에 대한 모멘트가 없다. 마찰력은 C로부터 거리 $2a$인 곳에, 장력은 수직 거리 a인 곳에 작용하며 원기둥을 서로 반대 방향으로 돌리므로

$$F \cdot 2a = T \cdot a, \qquad \text{즉,} \qquad T = 2F.$$

? **생각해 보기** 마찰력과 장력은 왜 원기둥을 서로 반대 방향으로 돌리는가?

이 둘은 C에 대한 모멘트를 갖는 유일한 두 힘이므로, 그 모멘트는 서로 상쇄되어야 한다. P에서 줄이 당기는 힘만 있다면 원기둥은 빗면 위쪽으로 굴러 올라가도록 돌 것이다. A에서 빗면 위쪽을 향하는 마찰력은 원기둥을 반대 방향으로 돌린다. 만약 마찰력의 방향을 잘못 추측했다면 아래 식들에서 단순히 $F < 0$이 나올 것이므로, 이 부호는 별도의 가정이 아니다.

빗면에 평행한 방향으로 분해하기 (빗면 위쪽이 양의 방향):

$$F + T\cos 2\alpha = Mg\sin\alpha \quad \Longrightarrow \quad F(1+2\cos 2\alpha) = Mg\sin\alpha.$$

빗면에 수직인 방향으로 분해하기: 장력은 빗면을 향하는 성분 $T\sin 2\alpha$를 가지므로

$$R = Mg\cos\alpha + T\sin 2\alpha = Mg\cos\alpha + 2F\sin 2\alpha.$$

$F = Mg\sin\alpha/(1+2\cos 2\alpha)$를 대입하면

$$\begin{aligned} R(1+2\cos 2\alpha) &= Mg(\cos\alpha + 2\cos 2\alpha\cos\alpha + 2\sin 2\alpha\sin\alpha) \\ &= Mg(\cos\alpha + 2\cos(2\alpha-\alpha)) = 3Mg\cos\alpha. \end{aligned}$$

따라서

$$F = \frac{Mg\sin\alpha}{1+2\cos 2\alpha}, \qquad R = \frac{3Mg\cos\alpha}{1+2\cos 2\alpha}.$$

원기둥은 빗면과 접촉한 상태를 유지하므로 $R > 0$이다. α가 예각이므로 $\cos\alpha > 0$이고, 따라서 $1+2\cos 2\alpha > 0$이며, 이는 $F > 0$임을 뜻한다. 두 식을 나누면

$$\frac{F}{R} = \frac{\sin\alpha}{3\cos\alpha} = \tfrac{1}{3}\tan\alpha.$$

평형을 이루려면 마찰력이 $F \le \mu R$를 만족해야 하므로, 요구한 대로 $\mu \ge F/R = \frac{1}{3}\tan\alpha$이다.

입자: 마찰계수의 최솟값

줄은 원래 있던 자리에 그대로 있으므로, 원기둥은 정확히 같은 위치에 있고 세 방정식도 변하지 않는다. 특히 장력은 여전히 다음과 같다.

$$T = 2F = \frac{2Mg\sin\alpha}{1+2\cos 2\alpha}.$$

$\tan\alpha = \frac{1}{2}$이면 $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$이므로

$$\cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{3}{5}, \qquad \sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{4}{5},$$

이고 $1+2\cos 2\alpha = \frac{11}{5}$이다. 따라서

$$T = \frac{2Mg}{\sqrt{5}}\cdot\frac{5}{11} = \frac{2\sqrt{5}}{11}Mg.$$

(원기둥에 대해서도 $\mu \ge \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$이어야 한다.)

이제 Q에 있는 입자를 살펴보자. 줄은 입자를 P 쪽으로, 즉 빗면 **아래쪽**으로 성분 $T\cos 2\alpha$, 빗면에서 **멀어지는** 쪽으로 성분 $T\sin 2\alpha$를 가지고 당긴다. 입자의 무게 $3Mg$ 또한 빗면 아래쪽 성분을 가지므로, 입자에 작용하는 마찰력 F'은 빗면 위쪽으로 작용해야 한다. 입자에 작용하는 수직항력을 R'이라 하자.

빗면에 평행한 방향:

$$F' = 3Mg\sin\alpha + T\cos 2\alpha = \frac{3Mg}{\sqrt{5}} + \frac{3}{5}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{11}Mg = \frac{33\sqrt{5}}{55}Mg + \frac{6\sqrt{5}}{55}Mg = \frac{39\sqrt{5}}{55}Mg.$$

빗면에 수직인 방향:

$$R' = 3Mg\cos\alpha - T\sin 2\alpha = \frac{6Mg}{\sqrt{5}} - \frac{4}{5}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{11}Mg = \frac{66\sqrt{5}}{55}Mg - \frac{8\sqrt{5}}{55}Mg = \frac{58\sqrt{5}}{55}Mg.$$

이 값은 양수이므로 입자는 실제로 빗면 위에 머문다. 입자와 빗면 사이의 마찰계수(coefficient of friction)를 μ'이라 하면 평형을 위해 $F' \le \mu' R'$이어야 하므로

$$\mu' \ge \frac{F'}{R'} = \frac{39}{58}.$$

마찰계수의 최솟값은 $\frac{39}{58}$이다.

검산

- 대신 A에 대한 모멘트를 구하면 $T\,a(1+2\cos 2\alpha) = 2a\,Mg\sin\alpha$가 되어 같은 장력을 얻는다. ($A$에서 줄까지의 수직 거리는 $a+2a\cos 2\alpha$이다.)
- $\alpha \to 0$이면 빗면이 수평이 되어 장력과 마찰력이 사라지고, 한계값 $\frac{1}{3}\tan\alpha \to 0$도 마땅히 그래야 하듯 0으로 간다.
- 수치 검산으로, 60° 미만의 무작위 예각 α 10 000개에 대해 좌표로 기하 구조를 구성하고 평형 방정식을 풀어 $F/R = \frac{1}{3}\tan\alpha$임을 확인하였다. $\tan\alpha = \frac{1}{2}$일 때는 $T \approx 0.4066\,Mg$, $F' \approx 1.5856\,Mg$, $R' \approx 2.3580\,Mg$, $F'/R' \approx 0.67241 = 39/58$을 얻는다.

흔한 실수

- 장력이 원기둥을 빗면 **쪽으로** 밀어 R를 증가시킨다는 점을 잊는 것. $T\sin 2\alpha$를 빠뜨리면 잘못된 비를 얻는다.
- 줄이 입자를 당기는 방향을 잘못 잡는 것. 줄은 입자를 P 쪽으로 당기므로, 입자에 작용하는 수직항력을 **줄이고** 빗면 아래쪽 힘을 더한다.
- 둘째 부분에서 장력을 처음부터 다시 계산하는 것. 원기둥의 평형은 바뀌지 않았으므로 T도 바뀌지 않는다.

STEP 너머

강체의 정역학(statics)은 결국 두 벡터 방정식으로 귀결된다. 합력이 0이고, **임의의** 점에 대한 모멘트의 합이 0이라는 것이다. 그 점을 잘 고르는 것, 여기서는 두 미지의 힘이 지나는 중심을 고르는 것이 핵심 기술이다. 대학에서는 이것이 힘의 계와 그와 동등한 "렌치(wrench)"에 대한 연구로 이어진다. 마찰 문제는 또한 평형이 **어떻게** 깨지는가, 즉 미끄러짐(slipping), 굴림(rolling), 넘어짐(toppling) 중 무엇으로 깨지는가에 관한 질문으로 이어진다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 강체의 정역학과 회전을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.