풀이

STEP III 1991, 문제 10

순수수학 • 뉴턴 항등식

STEP III 1991, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/91-s3-q10

핵심 아이디어

이 다항식은 0이 아닌 계수가 세 개뿐이므로 대칭함수(symmetric function) Σ_m 가운데 거의 모두가 0이 되고, 주어진 항등식(뉴턴(Newton)의 항등식)은 두 항으로 된 점화식(recurrence)으로 줄어든다. 차수 n을 넘어서면 이 항등식은 더 이상 적용되지 않지만, 훨씬 더 간단한 사실이 성립한다. 모든 근은 방정식 자체를 만족하므로, 방정식에 α^k를 곱하고 근에 대하여 더하면 S_{n+k}를 앞선 거듭제곱 합(power sum)들과 연결할 수 있다.

풀이

S_{n-1}까지의 거듭제곱 합

$x^n - qx^{n-1} + r$를 $\prod_i (x - \alpha_i) = x^n - \Sigma_1 x^{n-1} + \Sigma_2 x^{n-2} - \cdots + (-1)^n \Sigma_n$와 비교하면 다음을 읽어 낼 수 있다.

$$\Sigma_1 = q, \qquad \Sigma_2 = \Sigma_3 = \cdots = \Sigma_{n-1} = 0, \qquad (-1)^n \Sigma_n = r.$$

주어진 항등식에서 $1 \le p \le n-1$이라 하자. $p \le n-1$이므로 $\Sigma_2, \ldots, \Sigma_p$를 포함하는 항은 모두 0이 된다. ($p = 1$일 때 항등식은 단순히 $S_1 - \Sigma_1 = 0$이다.) 남는 것은 다음과 같다.

$$S_p - q\,S_{p-1} = 0 \quad (2 \le p \le n-1), \qquad S_1 = q.$$

따라서 $S_1 = q$이고, 각 거듭제곱 합은 바로 앞의 것의 q배이다. p에 대한 수학적 귀납법(induction)에 의해

$$S_p = q^p \qquad \text{단, } 1 \le p \le n-1$$

이 되어 증명이 끝난다. 각 $\alpha_i^0 = 1$이므로 $S_0 = n$임도 적어 두면 편리하다.

S_n, S_{n+1}, S_{n+2}

$p = n$일 때에도 항등식은 여전히 적용되며, 이제 마지막 항이 나타난다.

$$S_n - q\,S_{n-1} + (-1)^n n\,\Sigma_n = 0.$$

$(-1)^n\Sigma_n = r$이므로 다음을 얻는다.

$$S_n = q \cdot q^{n-1} - nr = q^n - nr.$$

생각해 보기 주어진 항등식은 $p = n$에서 끝난다. 그 너머로는 어떻게 나아갈 수 있을까?

방정식 자체를 이용한다. 각 근은 $\alpha_i^n = q\alpha_i^{n-1} - r$를 만족한다. 양변에 α_i^k $(k \geq 0)$를 곱하고 i에 대하여 더하면 다음을 얻는다.

$$S_{n+k} = q\,S_{n+k-1} - r\,S_k \qquad (k \geq 0). \tag{$*$}$$

$k = 0$이면 다시 $S_n = q^n - nr$을 얻으므로, 믿음직한 교차 확인이 된다. 이제

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= q\,S_n - r\,S_1 = q^{n+1} - nqr - qr = q^{n+1} - (n+1)qr, \\ S_{n+2} &= q\,S_{n+1} - r\,S_2 = q^{n+2} - (n+1)q^2r - q^2r = q^{n+2} - (n+2)q^2r. \end{aligned}$$

여기서 $S_1 = q$와 $S_2 = q^2$을 이용했는데, $n \geq 5$이면 $2 \leq n-1$이므로 이 식들이 성립한다.

일반 공식

$S_n = q^n - nr$, $S_{n+1} = q^{n+1} - (n+1)qr$, $S_{n+2} = q^{n+2} - (n+2)q^2r$라는 패턴으로부터 다음을 추측할 수 있다.

$$S_{n+m} = q^{n+m} - (n+m)\,q^m r \qquad \text{단, } 0 \leq m \leq n-1.$$

이를 m에 대한 수학적 귀납법으로 증명한다. $m = 0$인 경우는 위에서 보인 $S_n = q^n - nr$이다.

$1 \leq m \leq n-1$이고, 공식이 $m-1$에 대하여 성립한다고 가정하자. $k = m$으로 둔 $(*)$에 의해

$$\begin{aligned} S_{n+m} &= q\,S_{n+m-1} - r\,S_m \\ &= q(q^{n+m-1} - (n+m-1)q^{m-1}r) - r\,q^m \\ &= q^{n+m} - (n+m)\,q^m r, \end{aligned}$$

이다. 여기서 $1 \leq m \leq n-1$이므로 성립하는 $S_m = q^m$을 이용했다. 이것은 m에 대한 공식이다. 따라서 귀납법에 의해 이 공식은 모든 $0 \leq m \leq n-1$, 즉 $m < n$에 대하여 성립한다.

? 생각해 보기 조건 $m < n$은 정확히 어디에서 쓰이는가?

$S_m = q^m$을 쓰는 단계에서만 쓰인다. $m = n$이면 S_n이 필요한데, 이것은 q^n이 아니라 $q^n - nr$이므로 여분의 $-nr$이 끼어들어 패턴이 깨진다. 실제로 $(*)$로부터 $S_{2n} = q^{2n} - 2nq^n r + nr^2$을 얻는다.

검산

- $r = 0$이면 방정식은 $x^{n-1}(x - q) = 0$이고, 근은 q와 $0(n-1$개$)$이므로 모든 $S_k = q^k$이다. 우리가 얻은 공식은 모두 이것으로 귀결된다.
- $q = 0$이면 근은 $-r$의 n제곱근이다. 그러면 $1 \le p \le n-1$에 대하여 $S_p = 0$이고, $S_n = n \cdot (-r) = -nr$이므로 $q^n - nr$과 일치한다.
- 수치적으로, 무작위로 고른 q, r와 $5 \le n \le 9$에 대하여 모든 근을 구하고 그 거듭제곱을 더해 보았다. $S_p = q^p$와 S_{n+m}에 대한 공식$(0 \le m \le n-1)$은 약 10^{-12} 이내로 일치했고, $m = n$에서는 공식이 눈에 띄게 어긋났다.

흔한 실수

- 항등식의 마지막 항에 붙은 인수 p를 빠뜨리는 것. 그러면 $S_n = q^n - r$을 얻게 되는데, 올바른 값은 $q^n - nr$이다.
- Σ_n의 부호를 틀리는 것. 상수항은 $(-1)^n \Sigma_n$이므로 $(-1)^n n\Sigma_n = nr$이며, 이는 n의 홀짝성(parity)과 관계없다.
- 주어진 항등식을 $p > n$에 적용하는 것. 이 경우 항등식은 주어진 형태로는 성립하지 않는다.

STEP 너머

이것이 바로 뉴턴 항등식이며, $(*)$는 거듭제곱합이 원래 방정식을 특성다항식(characteristic polynomial)으로 갖는 선형 점화식을 만족함을 보여 준다. 행렬의 언어로 말하면, S_k는 A^k의 대각합(trace)이고, 여기서 A는 이 다항식의 동반행렬(companion matrix)이다. 근에 대한 임의의 대칭다항식을 Σ_m으로 나타낼 수 있다는 사실은 대칭다항식의 기본정리(fundamental theorem of symmetric polynomials)이며, 이는 갈루아(Galois) 이론으로 이어진다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 이러한 대수학이 전개되는 모습을 살펴보기에 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.