풀이

STEP III 1991, 문제 1

순수수학 • 급수와 전개

> **STEP III 1991, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s3-q1

핵심 아이디어

세 소문항 모두 무작정 계산에 들어가기 전에 잠시 생각해 보면 보상이 따른다. (i)에서는 부분분수(partial fractions)로 분해하면 합이 서로 소거되는(telescope) 조각들로 바뀐다. (ii)에서는 삼차식 $1+x+x^2+x^3$이 등비급수(geometric series)이므로 아주 간단한 두 식의 몫으로 쓸 수 있고, 그러면 로그가 두 개의 표준 급수로 나뉜다. (iii)에서는 먼저 지수를 급수로 쓴다. 이 급수가 x^2부터 시작하므로 지수급수(exponential series)에서 x^4까지 닿을 수 있는 항은 몇 개뿐이다.

풀이

소문항 (i)

다음을 만족하는 상수를 찾는다.

$$\frac{6}{r(r+1)(r+3)} = \frac{A}{r} + \frac{B}{r+1} + \frac{C}{r+3}.$$

가리기 방법(cover-up rule)에 의해 $A = \dfrac{6}{1\cdot 3} = 2, B = \dfrac{6}{(-1)(2)} = -3, C = \dfrac{6}{(-3)(-2)} = 1$이다. (간단히 확인해 보면 $A+B+C=0$인데, 좌변은 r이 클 때 $6/r^3$처럼 행동하여 $1/r$ 항이 없으므로 당연히 그래야 한다.)

계수 $2, -3, 1$의 합이 0이므로, 이를 $2-2$와 $-1+1$로 나누어 보는 것이 자연스럽다.

$$\frac{6}{r(r+1)(r+3)} = 2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}\right) - \left(\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+3}\right).$$

이제 각 괄호는 서로 소거된다. 첫째 괄호에서는 다음을 얻는다.

$$\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

둘째 괄호에서는 항들이 두 칸씩 떨어져 있으므로 양 끝에서 각각 두 항씩 남는다.

$$\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{1}{r+1}-\frac{1}{r+3}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}.$$

이를 합치면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{n}\frac{6}{r(r+1)(r+3)} &= 2-\frac{2}{n+1}-\frac{5}{6}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\\ &= \frac{7}{6}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}.\end{aligned}$$

소문항 (ii)

? **생각해 보기** $1+x+x^2+x^3$을 더 깔끔하게 쓰는 방법이 있을까?

이것은 공비가 x인 등비급수이므로 $x\neq 1$일 때

$$1+x+x^2+x^3=\frac{1-x^4}{1-x}.$$

$|x|<1$이면 $1-x^4$와 $1-x$가 모두 양수이므로 로그를 나눌 수 있다.

$$\ln(1+x+x^2+x^3)=\ln(1-x^4)-\ln(1-x).$$

$|y|<1$에서 성립하는 $\ln(1-y)=-\sum_{k\geq 1}y^k/k$를 이용하면 (여기서도 $|x^4|<1$이다)

$$-\ln(1-x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k},\qquad \ln(1-x^4)=-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{4m}}{m}.$$

둘째 급수는 k가 4의 배수인 거듭제곱 x^k에만 관여한다. 이러한 $k=4m$에 대하여 합친 계수는

$$\frac{1}{4m}-\frac{1}{m}=-\frac{3}{4m}=-\frac{3}{k}.$$

따라서

$$\ln(1+x+x^2+x^3)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{3x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\cdots,$$

이고, 일반항(general term)은 다음과 같다.

$$\frac{x^k}{k}\ \ 4\nmid k\text{이면},\qquad -\frac{3x^k}{k}\ \ 4\mid k\text{이면}.$$

모든 계수가 0이 아니므로, 위에 나타낸 다섯 항이 0이 아닌 처음 다섯 항이다.

소문항 (iii)

$-1 < x \leq 1$일 때 $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$이므로

$$u = x\ln(1+x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \cdots .$$

? **생각해 보기** $\mathrm{e}^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \cdots$에서 몇 개의 항이 필요할까?

u가 x^2부터 시작하므로 u^k는 x^{2k}부터 시작한다. 따라서 u^3 이후의 항은 x^4까지 아무런 기여도 하지 않고, u^2에서는 최저차항 x^4만 필요하다. 그러므로

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{x\ln(1+x)} &= 1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3}\right) + \frac{1}{2}x^4 + \cdots \\ &= 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{5x^4}{6} + \cdots .\end{aligned}$$

(물론 $\mathrm{e}^{x\ln(1+x)}$는 바로 $(1+x)^x$이다.)

검산

- (i)에서 $n = 1$이면 $\frac{7}{6} - 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$이고, 이는 단 하나의 항 $\frac{6}{1\cdot 2\cdot 4}$와 일치한다. $n \to \infty$로 보내면 무한급수의 합(sum to infinity) $\frac{7}{6}$을 얻는다.
- (ii)에서 $y = x + x^2 + \cdots$로 두고 $\ln(1+y) \approx y - \frac{y^2}{2}$를 이용해 이차까지 직접 전개하면 $x + x^2 - \frac{x^2}{2} = x + \frac{x^2}{2}$가 되어 처음 두 항과 일치한다. 수치적으로도 $x = 0.5$에서 급수를 많은 항까지 더하면 $\ln 1.875 \approx 0.6286$과 일치한다.
- (iii)에서 $x = 0.01$일 때 전개식과 $(1.01)^{0.01}$의 차는 약 7.4×10^{-11}로, 마땅히 그래야 하듯 x^5 정도의 크기이다(다음 계수는 $-\frac{3}{4}$임이 밝혀진다).

흔한 실수

- (i)에서 간격이 둘인 소거 합은 양 끝에서 한 항이 아니라 두 항씩 남긴다는 사실을 잊는 것.
- (ii)에서 x^4의 계수를 $\frac{1}{4} - 1$로 제대로 구해 놓고는 일반항을 $(-1)^{k+1}x^k/k$ 따위로 쓰는 것. 규칙은 k를 4로 나눈 나머지에 따라 달라진다.
- (iii)에서 $\frac{1}{2}u^2$ 항을 빠뜨리는 것. 이 항은 $\frac{1}{2}x^4$만큼 기여한다.

STEP 너머

소문항 (iii)은 거듭제곱급수(power series)를 합성하는 작은 예이며, 각 항의 최저 차수를 추적하는 이 정리 요령은 대학에서 점근 전개(asymptotic expansion)를 다루는 방식 그대로이다. 거듭제곱급수가 언제 수렴하는지, 그리고 왜 수렴반지름(radius of convergence) 안에서는 급수를 자유롭게 더하고 곱하고 합성할 수 있는지는 해석학(analysis) 첫 강좌에서 다루는 내용이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)가 이를 명료하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.