풀이

STEP II 1991, 문제 8

순수수학 • 비선형 1계 상미분방정식

STEP II 1991, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/91-s2-q8

핵심 아이디어

두 미분방정식(differential equation)은 모두 $\frac{dy}{dx}$에 대한 이차식(quadratic)이므로, 먼저 도함수(derivative)를 대수적으로 구한 뒤에야 적분하면 된다. 각 이차방정식은 근이 두 개이므로 후보가 되는 일계(first-order) 방정식이 두 개 나오고, $x = 0$에서의 조건이 어느 가지(branch)가 허용되는지를 결정한다. 쌍곡선 함수 항등식(hyperbolic identities), 특히 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$과 반각 공식(half-angle formulae)을 쓰면 근이 깔끔하게 정리된다.

풀이

이차방정식

근의 공식(quadratic formula)에 의해

$$u = \frac{-2\sinh x \pm \sqrt{4\sinh^2 x + 4}}{2} = -\sinh x \pm \sqrt{\sinh^2 x + 1} = -\sinh x \pm \cosh x,$$

이다. 여기서 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$과 $\cosh x > 0$을 이용하였다. $\cosh x - \sinh x = \mathrm{e}^{-x}$이고 $\cosh x + \sinh x = \mathrm{e}^{x}$이므로 두 근은

$$u = \mathrm{e}^{-x} \qquad \text{또는} \qquad u = -\mathrm{e}^{x}.$$

이다. (검산: 두 근의 곱은 -1이고 합은 $\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{x} = -2\sinh x$이므로, 마땅히 그래야 하는 값과 같다.)

첫 번째 미분방정식

$u = \frac{dy}{dx}$로 두면 이 방정식은 정확히 위의 이차방정식이므로, 각 x에서 $y' = e^{-x}$이거나 $y' = -e^{x}$이다.

> **생각해 보기** x의 어떤 값에서는 y'이 한 근을 따르고, 다른 곳에서는 다른 근을 따를 수 있을까?

그럴 수 없다. 첫 번째 근은 항상 양수이고 두 번째 근은 항상 음수이므로 두 근은 결코 만나지 않는다. 도함수는 중간값 성질(intermediate value property)을 가지므로(다르부 정리(Darboux's theorem); y'이 연속이라고 가정한다면 보통의 중간값 정리(intermediate value theorem)), y'은 0을 거치지 않고는 양수 값에서 음수 값으로 건너뛸 수 없는데, 두 근 모두 그 값을 갖지 않는다. 따라서 y'은 처음부터 끝까지 한 근 위에 머문다.

$x = 0$에서 두 근은 1과 -1이고, $y' > 0$이어야 하므로 $\frac{dy}{dx} = e^{-x}$이다. 적분하면 $y = -e^{-x} + c$이고, $x = 0$에서 $y = 0$이므로 $c = 1$이다.

$$\boxed{y = 1 - e^{-x}}$$

두 번째 미분방정식

$p = \frac{dy}{dx}$로 쓰면 $p^2 \sinh x + 2p - \sinh x = 0$이다.

$x = 0$에서, $\sinh 0 = 0$이므로 방정식은 $2p = 0$이 되고, 따라서 반드시 $y'(0) = 0$이어야 한다.

$x \neq 0$일 때, $\sinh x \neq 0$이므로 근의 공식에 의해

$$p = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4\sinh^2 x}}{2\sinh x} = \frac{-1 \pm \cosh x}{\sinh x}.$$

이다. $\cosh x = 1 + 2\sinh^2 \frac{x}{2} = 2\cosh^2 \frac{x}{2} - 1$과 $\sinh x = 2\sinh \frac{x}{2} \cosh \frac{x}{2}$를 이용하면 두 근은 다음과 같이 간단해진다.

$$\frac{\cosh x - 1}{\sinh x} = \frac{2\sinh^2 \frac{x}{2}}{2\sinh \frac{x}{2} \cosh \frac{x}{2}} = \tanh \tfrac{x}{2},$$
$$\frac{-1 - \cosh x}{\sinh x} = -\frac{2\cosh^2 \frac{x}{2}}{2\sinh \frac{x}{2} \cosh \frac{x}{2}} = -\coth \tfrac{x}{2}.$$

가지 고르기. 두 번째 근 $-\coth \frac{x}{2}$는 $x \to 0$일 때 유계가 아니며, 이를 적분하면 $y = -2\ln|\sinh \frac{x}{2}| + c$가 되는데, 이는 $x \to 0$일 때 어느 쪽에서 다가가든 $+\infty$로 발산한다. 따라서 원점의 어느 쪽에서도 이 가지로는 $x = 0$에서 연속이면서 $y(0) = 0$인 해를 얻을 수 없다. 그러므로 $x = 0$ 근처에서는 (각각의 쪽에서) 첫 번째 근을 택해야 하며, $\tanh 0 = 0$이므로 이는 $y'(0) = 0$과도 일치한다. 두 근은 결코 일치하지 않으므로(하나는 x와 같은 부호, 다른

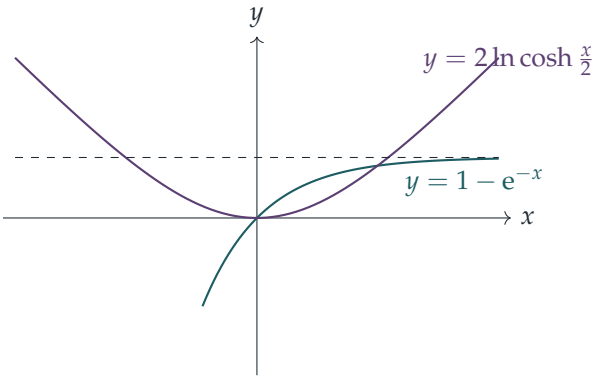
하나는 반대 부호를 가지며, $x \neq 0$에서 어느 것도 0이 되지 않는다), 앞에서와 같은 중간값 논증에 의해 해는 모든 x에 대해 이 가지 위에 머문다.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tanh\tfrac{x}{2} \quad \text{모든} x.$$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\sinh\frac{x}{2}$이므로 $\tanh\frac{x}{2} = 2\cdot\dfrac{\frac{1}{2}\sinh\frac{x}{2}}{\cosh\frac{x}{2}}$이고, 이는 $2f'/f$ 꼴이다. 따라서 적분하면 $y = 2\ln\cosh\frac{x}{2} + c$이다($\cosh > 0$이므로 절댓값은 필요 없다). 조건 $y(0) = 0$에서 $c = 0$이므로

$$\boxed{y = 2\ln\cosh\tfrac{x}{2} = \ln\left(\frac{1+\cosh x}{2}\right)}$$

이다. 두 번째 형태는 $2\cosh^2\frac{x}{2} = 1 + \cosh x$에서 나온다.



검산

- $y = 1 - \mathrm{e}^{-x}$인 경우: $y'^2 + 2y'\sinh x = \mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}) = 1$이므로 요구 조건을 만족하고, $y'(0) = 1 > 0$이다.
- $y = 2\ln\cosh\frac{x}{2}$인 경우, $t = \tanh\frac{x}{2}$로 두면 $\sinh x = \frac{2t}{1-t^2}$이므로 $\sinh x\,(t^2 - 1) + 2t = -2t + 2t = 0$이다. 방정식이 $x \mapsto -x$, $y \mapsto y$에 대해 변하지 않으므로, 마땅히 그래야 하듯 이 해는 우함수(even function)이다.
- 수치적으로, $x = 1$에서 두 해의 값은 $1 - \mathrm{e}^{-1} \approx 0.6321$과 $2\ln\cosh\frac{1}{2} \approx 0.2402$이다. 무작위로 고른 여러 점에서 유한차분(finite-difference)으로 구한 도함수를 대입하면 두 방정식이 모두 10^{-6} 이내로 성립한다.

흔한 실수

- 두 번째 방정식을 $\sinh x$로 나누면서, 이것이 $x = 0$에서 0이 된다는 사실을 놓치는 것. 그 곳이 바로 초기 조건이 주어진 곳이다. 원래 방정식은 $y'(0) = 0$을 강제한다.

- 두 번째 부분에서 두 가지를 모두 남겨 두는 것. $-\coth\frac{x}{2}$ 가지는 그 적분이 원점에서 발산하므로 $y(0)=0$을 만족할 수 없다.

STEP 너머

$F(x,y,y')=0$과 같이 y'에 대해 선형이 아닌 방정식은 한 점을 지나는 해가 여러 개일 수도 있고, 어느 한 가지로도 기술되지 않는 "특이해(singular solution)"를 가질 수도 있다. 그래서 존재성과 유일성 정리(existence and uniqueness theorem)(피카르–린델뢰프(Picard–Lindelöf) 정리)는 이미 $y'=f(x,y)$ 꼴로 풀린 방정식에 대해 진술된다. 여기서는 두 근이 서로 떨어져 있었으므로 각 가지가 잘 행동했다. 판별식(discriminant)이 0이 될 수 있으면 가지들을 이어 붙일 수 있고 유일성이 깨진다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에서 존재성, 유일성, 그리고 이러한 비선형 일계 방정식을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.