풀이

STEP II 1991, 문제 7

순수수학 • 함수방정식

> **STEP II 1991, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q7

핵심 아이디어

함수방정식(functional equation)은 **모든** x와 y에 대하여 성립하므로, 한 변수를 고정한 채 다른 변수에 대하여 미분할 수 있다. 그러면 함수방정식은 서로 다른 두 점에서의 g' 값을 잇는 미분방정식(differential equation)으로 바뀐다. 이때 한 변수를 영리하게 고르면 모든 곳에서 g'이 결정되고, 적분하면 풀이가 끝난다. 문제에서처럼 전체에 걸쳐 g와 f는 미분가능(differentiable)하다고 가정한다.

풀이

도함수 사이의 관계

$y > 0$을 고정하고 $g(x) + g(y) = g(z)$를 x에 대하여 미분한다. 이제 $g(y)$는 상수이므로, 연쇄법칙(chain rule)에 의하여

$$g'(x) = g'(z)\,\frac{\partial z}{\partial x}.$$

몫의 미분법(quotient rule)에 의하여

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y(x+y+1) - xy}{(x+y+1)^2} = \frac{y^2+y}{(x+y+1)^2},$$

이고, 이것이 첫 번째 꼴이다. 두 번째 꼴을 얻으려면 $z+1$이 깔끔하게 인수분해된다는 점에 주목한다.

$$z+1 = \frac{xy+x+y+1}{x+y+1} = \frac{(x+1)(y+1)}{x+y+1}, \qquad \text{따라서} \qquad z(z+1) = \frac{xy(x+1)(y+1)}{(x+y+1)^2}.$$

이를 $x(x+1)$로 나누면 정확히 $\dfrac{y(y+1)}{(x+y+1)^2}$이 되므로

$$g'(x) = \frac{y^2+y}{(x+y+1)^2}\,g'(z) = \frac{z(z+1)}{x(x+1)}\,g'(z),$$

이고, 이것이 보이려던 식이다. 이 식을 다음과 같은 대칭적인 꼴로 써 두면 유용하다.

$$x(x+1)\,g'(x) = z(z+1)\,g'(z). \qquad (\dagger)$$

$2g'(1) = (u^2+u)g'(u)$ 이끌어 내기

> **생각해 보기** 우리는 $(0,1)$에 속하는 모든 u에 대한 명제를 원한다. 어느 변수를 어떤 값으로 고정해야 할까?

$(\dagger)$에 $x=1$을 대입하면 좌변은 $2g'(1)$이 되고 $z = \dfrac{y}{y+2}$이다. y가 $(0,\infty)$ 전체를 움직일 때 $\dfrac{y}{y+2} = 1 - \dfrac{2}{y+2}$는 0에서 1을 향해 연속적으로 증가하므로, $0<u<1$인 모든 값 u를 취한다(구체적으로 $y = \frac{2u}{1-u}$). 따라서

$$2g'(1) = (u^2+u)\,g'(u) \qquad \text{모든} 0<u<1.$$

적분하기

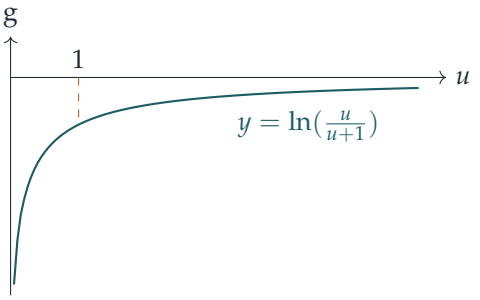
상수 $A = 2g'(1)$로 놓는다. 그러면 $0<u<1$에 대하여 부분분수(partial fractions)를 이용하면

$$g'(u) = \frac{A}{u(u+1)} = A\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right),$$

이고, 이를 적분하면(모든 양이 양수이므로 절댓값 기호는 필요 없다)

$$g(u) = A(\ln u - \ln(u+1)) + B = A\ln\left(\frac{u}{u+1}\right) + B.$$

사실 이 공식은 $u<1$일 때뿐 아니라 **모든** $u>0$에 대하여 성립한다. x를 고정하면 y가 0에서 ∞로 갈 때 $z = \dfrac{xy}{x+y+1}$은 0에서 x를 향해 증가하므로, $z<1$이 되도록 y를 고를 수 있다. 그러면 $(\dagger)$와 위의 결과로부터 $x(x+1)g'(x) = z(z+1)g'(z) = A$이다. 따라서 같은 적분이 $(0,\infty)$ 전체에서 통하며, $(0,\infty)$는 구간이므로 상수 B는 하나뿐이다.



(그림의 곡선은 $A = 1, B = 0$인 경우이다. 이 곡선은 음수이고 증가하며, $u \to \infty$일 때 0으로 다가간다.)

$(*)$ 확인하고 B 구하기

$g(u) = A \ln \frac{u}{u+1} + B$를 대입한다. $(*)$의 좌변은

$$g(x) + g(y) = A \ln \frac{xy}{(x+1)(y+1)} + 2B.$$

우변에 대해서는, 앞에서 구한 $z+1$의 인수분해로부터

$$\frac{z}{z+1} = \frac{xy}{x+y+1} \cdot \frac{x+y+1}{(x+1)(y+1)} = \frac{xy}{(x+1)(y+1)},$$

이므로

$$g(z) = A \ln \frac{xy}{(x+1)(y+1)} + B.$$

두 변이 모든 $x, y > 0$에 대하여 일치할 필요충분조건은 $2B = B$, 즉 $B = 0$이다. 따라서 $g(u) = A \ln \dfrac{u}{u+1}$은 $(*)$를 만족한다.

A를 결정할 수 있는가?

그럴 수 없다. 위의 확인 과정은 $A = 0$(영함수)을 포함하여 **모든** A 값에 대하여 성립한다. 정의 $A = 2g'(1)$도 도움이 되지 않는다. 우리가 구한 해에 대하여 $g'(1) = A(1 - \frac{1}{2}) = \frac{A}{2}$이므로 $A = 2g'(1)$은 저절로 참이 되어 새로운 정보를 주지 않는다. 방정식 $(*)$는 g에 대하여 선형(linear)이므로 해의 상수배는 다시 해가 되며, A는 바로 그 배율일 뿐이다.

함수 f

같은 방법이 통한다. $y > 0$을 고정하고 $f(x) + f(y) = f(xy)$를 x에 대하여 미분하면

$$f'(x) = y\, f'(xy).$$

? **생각해 보기** 여기서 $x = 1$을 대입하는 것에 해당하는 것은 무엇일까?

$x = 1$을 대입하면 모든 $y > 0$에 대하여 $\mathrm{f}'(1) = y\,\mathrm{f}'(y)$이므로, $C = \mathrm{f}'(1)$로 놓으면

$$\mathrm{f}'(y) = \frac{C}{y} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{f}(y) = C\ln y + D \quad (y > 0).$$

이를 다시 대입하면 $\mathrm{f}(x) + \mathrm{f}(y) = C\ln(xy) + 2D$이고 $\mathrm{f}(xy) = C\ln(xy) + D$이므로 $D = 0$이다. (같은 이야기로, 방정식에 $x = y = 1$을 대입하면 $2\mathrm{f}(1) = \mathrm{f}(1)$이므로 $\mathrm{f}(1) = 0$이다.) 따라서 보이려던 대로 $\mathrm{f}(x) = C\ln x$이고, 이번에도 C는 임의의 값이다.

검산

- $x = 1, y = 2$로 놓으면 $z = \frac{1}{2}$이고, 두 도함수 인수는 $\frac{6}{16}$과 $\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{8}$으로 일치한다.
- $A = 1$일 때: $\mathrm{g}(1) + \mathrm{g}(2) = \ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} = \ln\frac{1}{3}$이고, $\mathrm{g}(\frac{1}{2}) = \ln\frac{1/2}{3/2} = \ln\frac{1}{3}$이다. ✓
- 컴퓨터로 무작위로 고른 1000개의 점에서 유한차분(finite differences)을 이용해 도함수 항등식을 확인하였고, 여러 A 값에 대하여 $\mathrm{g}(x) + \mathrm{g}(y) - \mathrm{g}(z)$가 정확히 B와 같음(따라서 $B = 0$일 때에만 0이 됨)을 확인하였다.

흔한 실수

- x에 대하여 미분할 때 $\mathrm{g}(y)$가 상수라는 점을 잊거나, 연쇄법칙의 인수 $\partial z/\partial x$를 빠뜨린다.
- $x = 1$을 대입하고서 z가 정말로 $(0, 1)$ 전체를 덮는지 확인하지 않는다. 바로 이 확인이 하나의 등식을 모든 u에 대한 명제로 바꾸어 준다.
- "적분상수(constant of integration)는 중요하지 않으니까" B가 0이어야 한다고 가정한다. $B = 0$을 강제하는 것은 방정식 $(*)$이며, 이는 반드시 보여야 한다.

STEP 너머

두 번째 방정식은 코시(Cauchy)의 로그 함수방정식이다. $x = \mathrm{e}^s$로 놓으면 이 방정식은 $h(s + t) = h(s) + h(t)$로 바뀐다. 여기서는 미분가능성을 가정했지만, 대학의 첫 해석학(analysis) 강의에서는 한 점에서의 연속성(continuity)만으로도 $h(s) = cs$가 강제된다는 것을 배운다. 반면 아무런 정칙성 조건이 없으면 (해멜 기저(Hamel basis)를 이용해 만든) 기괴한 비선형 해가 존재한다. 첫 번째 방정식도 모습만 바꾼 같은 방정식이다. $w = \ln\frac{u}{u+1}$로 치환하면 $(*)$는 덧셈꼴 방정식으로 바뀐다. 이런 종류의 연속성 논증에 대해서는 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 읽어 보면 좋다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.