풀이

STEP II 1991, 문제 6

순수수학 • 적분의 상계와 하계

STEP II 1991, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/91-s2-q6

핵심 아이디어

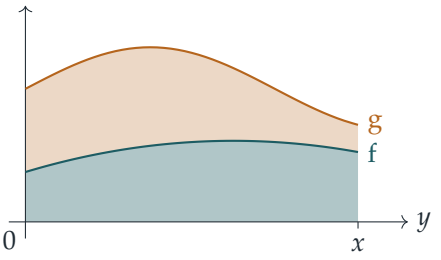
0부터 x까지의 적분(integral)은 넓이이고, 더 작은 음이 아닌 함수는 더 작은 넓이를 둘러싼다. 이 한 가지 사실을 거듭 사용하면 이미 알고 있는 부등식(inequality)에서 새로운 부등식을 얻을 수 있다. $0 \le \cos y \le 1$을 적분하면 $\sin x$에 대한 한계를 얻고, 그것을 적분하면 $\cos x$에 대한 한계를 얻으며, 다시 적분하면 $\sin x$에 대한 더 정밀한 한계를 얻는다. 그런 다음 각 적분의 한계는 피적분함수(integrand)를 정확히 적분할 수 있는 두 함수 사이에 가두어 얻는다.

풀이

적분의 비교

$[0, x]$에서 $\mathrm{f}(y) \ge 0$이므로 f의 그래프는 y축 위 또는 그보다 위쪽에 있다. 따라서 $\int_0^x \mathrm{f}(y)\,\mathrm{d}y$는 그래프와 축 사이의 넓이이고, 이는 음이 아니다. 또 $\mathrm{f}(y) \le \mathrm{g}(y)$이므로 f 아래의 영역은 g 아래의 영역 안에 들어 있고, 따라서 그 넓이는 더 크지 않다.

$$0 \le \int_0^x \mathrm{f}(y)\,\mathrm{d}y \le \int_0^x \mathrm{g}(y)\,\mathrm{d}y.$$



(해석적으로 보면, $g - f \geq 0$이므로 $\int_0^x (g-f)\,dy \geq 0$이고, 적분은 선형(linear)이다.)

$\sin x$와 $\cos x$에 대한 한계

$0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$라 하자. $0 \leq y \leq x$이면 $0 \leq \cos y \leq 1$이므로, 위의 결과를 $f = \cos$, $g = 1$로 적용하면

$$0 \leq \int_0^x \cos y\,dy \leq \int_0^x 1\,dy, \qquad \text{즉} \qquad 0 \leq \sin x \leq x.$$

이 식은 $[0, \frac{1}{2}\pi]$의 모든 x에 대해 성립하므로, 특히 $0 \leq y \leq x$에 대해 $0 \leq \sin y \leq y$이다. 위의 결과를 $f = \sin$, $g(y) = y$로 다시 적용하면

$$\int_0^x \sin y\,dy \leq \int_0^x y\,dy \quad \Longrightarrow \quad 1 - \cos x \leq \tfrac{1}{2}x^2 \quad \Longrightarrow \quad \cos x \geq 1 - \tfrac{1}{2}x^2.$$

첫 번째 적분

$[0, \frac{1}{10}]$에서($[0, \frac{1}{2}\pi]$ 안에 충분히 들어 있다) 이제 $1 - \frac{1}{2}x^2 \leq \cos x \leq 1$이므로

$$3 - \tfrac{1}{2}x^2 \leq 2 + \cos x \leq 3.$$

생각해 보기 그냥 제곱하고 역수를 취해도 될까?

그렇다. 여기 나오는 모든 양이 양수이기 때문이다. $3 - \frac{1}{2}x^2 \geq 3 - \frac{1}{200} > 0$이다. 양수에 대해서는 제곱하면 대소 관계가 유지되고, 역수를 취하면 대소 관계가 뒤집힌다. 그런 다음 $x \geq 0$을 곱하면

$$\frac{x}{9} \leq \frac{x}{(2+\cos x)^2} \leq \frac{x}{(3 - \frac{1}{2}x^2)^2} \qquad (0 \leq x \leq \tfrac{1}{10}).$$

세 함수 모두 음이 아니므로 0부터 $\frac{1}{10}$까지 적분할 수 있다. 왼쪽은

$$\int_0^{1/10} \frac{x}{9}\,dx = \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{1800}.$$

오른쪽의 경우, 분자 x는 부호를 제외하면 $3 - \frac{1}{2}x^2$의 도함수(derivative)이고, $\frac{d}{dx}(3 - \frac{1}{2}x^2)^{-1} = x(3 - \frac{1}{2}x^2)^{-2}$이다. 따라서

$$\int_0^{1/10} \frac{x}{(3 - \frac{1}{2}x^2)^2}\,dx = \left[\frac{1}{3 - \frac{1}{2}x^2}\right]_0^{1/10} = \frac{200}{599} - \frac{1}{3} = \frac{600 - 599}{1797} = \frac{1}{1797}.$$

그러므로

$$\frac{1}{1800} \leq \int_0^{1/10} \frac{x}{(2+\cos x)^2}\,dx \leq \frac{1}{1797}.$$

$\sin x$에 대한 더 정밀한 한계

$0 \le y \le x \le \frac{1}{2}\pi$이면 $\cos y \ge 1 - \frac{1}{2}y^2$, 즉 $0 \le 1 - \cos y \le \frac{1}{2}y^2$이다(왼쪽 부등식은 $\cos y \le 1$이기 때문이다). 0부터 x까지 적분하면

$$\int_0^x (1 - \cos y)\,\mathrm{d}y \le \int_0^x \tfrac{1}{2}y^2\,\mathrm{d}y \quad\Longrightarrow\quad x - \sin x \le \tfrac{1}{6}x^3 \quad\Longrightarrow\quad \sin x \ge x - \tfrac{1}{6}x^3.$$

두 번째 적분

$[0, \frac{1}{10}]$에서 $x - \frac{1}{6}x^3 \le \sin x \le x$이므로

$$1 - \tfrac{1}{6}x^3 \le 1 - x + \sin x \le 1.$$

생각해 보기 왜 하필 이 조합을 살펴보는 것이 맞을까?

분모의 $-x$는 $\sin x$의 최고차항이 아닌 첫째 항, 즉 주요항을 상쇄하기 위해 있는 것이고, 그 결과 1에 x^3 정도 크기의 항이 더해진 꼴이 남는다. 아래 한계 $1 - \frac{1}{6}x^3 \ge 1 - \frac{1}{6000}$은 양수이므로, 앞에서처럼 제곱하고, 역수를 취하고(대소 관계가 뒤집힌다), $x^2 \ge 0$을 곱하면

$$x^2 \le \frac{x^2}{(1 - x + \sin x)^2} \le \frac{x^2}{(1 - \frac{1}{6}x^3)^2}.$$

적분하면 왼쪽은 $\int_0^{1/10} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1000} = \frac{1}{3000}$이다. 오른쪽의 경우 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1 - \frac{1}{6}x^3)^{-1} = \frac{1}{2}x^2(1 - \frac{1}{6}x^3)^{-2}$이므로

$$\int_0^{1/10} \frac{x^2}{(1 - \frac{1}{6}x^3)^2}\,\mathrm{d}x = 2\left[\frac{1}{1 - \frac{1}{6}x^3}\right]_0^{1/10} = 2\left(\frac{6000}{5999} - 1\right) = \frac{2}{5999}.$$

그러므로

$$\frac{1}{3000} \le \int_0^{1/10} \frac{x^2}{(1 - x + \sin x)^2}\,\mathrm{d}x \le \frac{2}{5999}.$$

검산

- 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 $\int_0^{1/10} x(2 + \cos x)^{-2}\,\mathrm{d}x \approx 0.00055648$이고, 이는 $1/1800 \approx 0.00055556$과 $1/1797 \approx 0.00055648$ 사이에 있다(위 한계는 매우 정밀해서 약 5×10^{-10} 이내로 일치한다).
- 마찬가지로 $\int_0^{1/10} x^2(1 - x + \sin x)^{-2}\,\mathrm{d}x \approx 0.000333389$이고, 이는 $1/3000 \approx 0.000333333$과 $2/5999 \approx 0.000333389$ 사이에 있다.
- 세 개의 점별 부등식은 $[0, \frac{1}{2}\pi]$의 무작위로 고른 10^5개의 점에서 모두 성립했고, $x = 0$에서 등호가 성립했다.

흔한 실수

- 부호를 확인하지 않고 역수를 취하는 것. $a \leq b$에서 $1/a \geq 1/b$를 얻는 것은 a와 b의 부호가 같을 때뿐이다.
- 비교 결과의 왼쪽 부등식에는 f ≥ 0이 필요하다는 것을 잊는 것. 여기서는 $\sin y \geq 0$과 $1 - \cos y \geq 0$이 이 조건을 보장한다.
- 적분의 위 한계를 구하는 데 $\cos x \leq 1$을 사용하는 것. $\cos x \leq 1$이면 분모가 9**보다 작아지므로**, 이로부터 얻는 것은 위 한계가 아니라 아래 한계 $1/1800$이다.

STEP 너머

$0 \leq \cos y \leq 1$을 반복해서 적분하면 번갈아 나타나는 테일러(Taylor) 한계의 사슬 $x - \frac{1}{6}x^3 \leq \sin x \leq x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 \leq \cdots$ 전체를 얻게 되며, 이는 sin과 cos의 테일러 급수(Taylor series)가 각각 그 함수로 수렴(converge)함을 증명하는 한 가지 방법이다. 적분의 단조성(monotonicity)과 피적분함수의 비교는 실해석학(real analysis)의 기본 도구로, 나머지항, 오차, 극한의 한계를 구하는 데 쓰인다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 적분과 나머지항이 있는 테일러 정리를 꼼꼼하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.