풀이

STEP II 1991, 문제 5

순수수학 • 적분의 점화 공식

> **STEP II 1991, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q5

핵심 아이디어

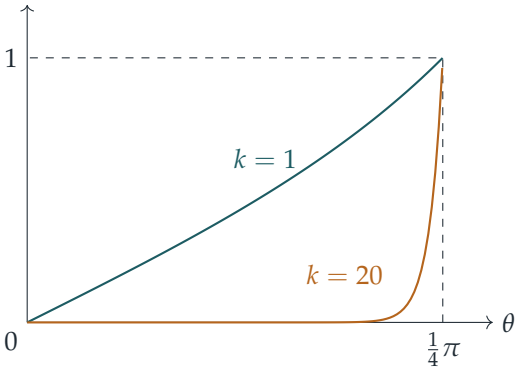
$I_k = \int_0^{\pi/4} \tan^k\theta\,\mathrm{d}\theta$로 놓는다. tan의 홀수 거듭제곱이나 짝수 거듭제곱은 그 자체로는 바로 적분되지 않지만, 두 개를 더하면 적분된다. $\tan^k\theta + \tan^{k+2}\theta = \tan^k\theta\sec^2\theta$이고, 이는 $\tan^{k+1}\theta/(k+1)$의 도함수(derivative)이기 때문이다. 이 점화식(reduction formula)을 수학적 귀납법(induction)으로 풀어 나가면 원하는 공식을 얻는다. 또 k가 클 때의 그래프 개형을 보면 적분값이 0으로 줄어든다는 것을 알 수 있고, 바로 이 사실이 공식을 무한급수(infinite series)의 합으로 바꾸어 준다.

풀이

그래프 개형

$[0, \frac{1}{4}\pi]$에서 $0 \le \tan\theta \le 1$이고, $\tan 0 = 0$, $\tan\frac{1}{4}\pi = 1$이다. $k = 1$일 때 그래프는 $(0,0)$에서 $(\frac{1}{4}\pi, 1)$까지 올라가며 완만하게 아래로 볼록하다(기울기 1에서 시작하여 기울기 $\sec^2\frac{1}{4}\pi = 2$로 끝난다).

$k \gg 1$이면, 1보다 작은 $\tan\theta$의 값은 모두 높은 거듭제곱을 하면서 0 쪽으로 짓눌리고, 양 끝값 0과 1은 그대로 남는다. 따라서 $\tan^k\theta$는 구간의 대부분에서 축에 바짝 붙어 있다가 $\theta = \frac{1}{4}\pi$에 아주 가까운 곳에서 1까지 치솟는다. 실제로 u가 작을 때 $\theta = \frac{1}{4}\pi - u$로 쓰면 $\tan\theta \approx 1 - 2u$이므로 $\tan^k\theta \approx (1-2u)^k \approx \mathrm{e}^{-2ku}$이다. 즉 이 뾰족한 부분의 폭은 약 $1/(2k)$이고, 그 아래의 넓이도 약 $1/(2k)$이다.



점화식

$k \geq 0$에 대하여

$$I_k + I_{k+2} = \int_0^{\pi/4} \tan^k\theta\,(1+\tan^2\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/4} \tan^k\theta\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \left[\frac{\tan^{k+1}\theta}{k+1}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{k+1}.$$

두 개의 초깃값도 필요하다.

$$I_0 = \tfrac{1}{4}\pi, \qquad I_1 = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = \Big[-\ln\cos\theta\Big]_0^{\pi/4} = -\ln\tfrac{1}{\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2}\ln 2.$$

홀수 거듭제곱

$J_n = I_{2n+1}$이라 하자. 점화식에서 $k = 2n-1$로 놓으면

$$J_n = \frac{1}{2n} - J_{n-1} \qquad (n \geq 1).$$

요구된 공식을 귀납법으로 증명한다. $n = 1$일 때 $J_1 = \frac{1}{2} - J_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2 = (-1)^1(\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2})$이고, 이는 $n = 1$일 때의 공식이다.

$n - 1 \geq 1$일 때 공식이 성립한다고 가정하자. 그러면

$$\begin{aligned} J_n &= \frac{1}{2n} - (-1)^{n-1}\left(\tfrac{1}{2}\ln 2 + \sum_{m=1}^{n-1}\frac{(-1)^m}{2m}\right) \\ &= (-1)^n\left(\tfrac{1}{2}\ln 2 + \sum_{m=1}^{n-1}\frac{(-1)^m}{2m}\right) + (-1)^n\frac{(-1)^n}{2n} \\ &= (-1)^n\left(\tfrac{1}{2}\ln 2 + \sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^m}{2m}\right), \end{aligned}$$

여기서 $(-1)^n(-1)^n = 1$을 이용하여 $\frac{1}{2n}$을 괄호 안의 $m = n$인 항으로 썼다. 따라서 귀납법에 의해 모든 양의 정수 n에 대하여 공식이 성립한다.

첫 번째 급수

> **생각해 보기** "그래프에서 작아 보인다"는 것만이 아니라, $J_n \to 0$임을 어떻게 알 수 있는가?

제대로 된 상계가 필요하다. $[0, \frac{1}{4}\pi]$에서 $\tan\theta \geq 0$이고 $\sec^2\theta \geq 1$이므로

$$0 \leq J_n = \int_0^{\pi/4} \tan^{2n+1}\theta \,\mathrm{d}\theta \leq \int_0^{\pi/4} \tan^{2n+1}\theta \sec^2\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2n+2}.$$

따라서 $n \to \infty$일 때 $J_n \to 0$이고, 이는 정확히 k가 클 때의 그래프 개형이 암시한 바이다(상계 $1/(2n+2)$도 뾰족한 부분의 넓이 약 $1/(2k)$와 맞아떨어진다). $|J_n|$은 공식에서 괄호 부분의 절댓값이므로

$$\left|\tfrac{1}{2}\ln 2 + \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^m}{2m}\right| = J_n \leq \frac{1}{2n+2} \to 0,$$

이고, 따라서 부분합(partial sum) $\sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^m}{2m}$은 $-\frac{1}{2}\ln 2$로 수렴(converge)한다. 양변에 -1을 곱하면

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{2m} = \tfrac{1}{2}\ln 2.$$

두 번째 급수

이제 짝수 거듭제곱에 대해서도 같은 일을 한다. $K_n = I_{2n}$이라 하자. 점화식에서 $k = 2n-2$로 놓으면

$$K_n = \frac{1}{2n-1} - K_{n-1} \qquad (n \geq 1), \qquad K_0 = \tfrac{1}{4}\pi.$$

완전히 같은 귀납법(이번에는 $K_1 = 1 - \frac{1}{4}\pi$에서 시작한다)으로

$$K_n = \int_0^{\pi/4} \tan^{2n}\theta \,\mathrm{d}\theta = (-1)^n\left(\tfrac{1}{4}\pi + \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^m}{2m-1}\right):$$

을 얻는다. 귀납 단계는 앞에서와 마찬가지로 $K_n = \frac{1}{2n-1} - (-1)^{n-1}(\cdots) = (-1)^n(\cdots) + (-1)^n\frac{(-1)^n}{2n-1}$이다. 같은 상계로

$$0 \leq K_n \leq \int_0^{\pi/4} \tan^{2n}\theta\sec^2\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2n+1} \to 0,$$

이므로 $\sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^m}{2m-1} \to -\frac{1}{4}\pi$이다. 즉

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{2m-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

검산

- $n = 1$일 때 $\int_0^{\pi/4} \tan^3\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2 \approx 0.15343$이고, 이 적분에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 소수점 아래 열째 자리까지 같은 값이 나온다. 이 방법으로 $n = 1, \ldots, 11$에 대하여 I_{2n+1}과 I_{2n}의 공식을 확인하였다.
- k가 클 때 수치적으로 $I_{100} \approx 0.0049995$, $I_{1000} \approx 0.00049999996$이며, 그래프 개형이 예측한 대로 $1/(2k)$에 매우 가깝다.
- 두 급수의 항을 백만 개 더하면 $0.346573\ldots$과 $0.785398\ldots$을 얻으며, 이를 $\frac{1}{2}\ln 2 = 0.346574$, $\frac{1}{4}\pi = 0.785398$과 비교할 수 있다. 위의 상계가 암시하듯 오차는 대략 다음 항의 크기이다.

흔한 실수

- 상계 없이 "$\tan^{2n+1}\theta \to 0$이므로 적분은 0으로 간다"고 말하는 것. 피적분함수(integrand)는 $\theta = \frac{1}{4}\pi$에서 0으로 가지 **않으므로**, $\sec^2\theta \geq 1$을 이용한 상계와 같은 근거가 필요하다.
- 귀납법에서의 부호 실수. $(-1)^n$을 괄호 밖에 두고, $n = 1$인 경우를 직접 계산한 값과 대조해 보아야 한다.

STEP 너머

첫 번째 급수는 교대 조화급수(alternating harmonic series) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots = \ln 2$의 절반이고, 두 번째 급수는 π에 대한 라이프니츠(Leibniz) 급수이다. 두 급수 모두 **조건수렴**(*conditionally convergent*)할 뿐이다. 즉 항의 순서를 바꾸면 합이 달라질 수 있는데, 이는 해석학(analysis) 첫 강의에서 일찍 만나는 놀라운 사실(리만(Riemann)의 재배열 정리)이다. 여기서 쓴 논증, 즉 정확한 오차항을 0으로 조여 가는 방법은 나머지항이 있는 테일러(Taylor) 정리와 같은 아이디어이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)가 두 주제를 모두 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.