풀이

STEP II 1991, 문제 4

순수수학 • 코사인의 합

> **STEP II 1991, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q4

이 문제는 *Beyond STEP*의 6.2 절 **가우스의 정17각형**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch06/gauss-17gon.html

핵심 아이디어

$5\phi = 2\pi$이고 $17\theta = 2\pi$이므로, 각의 큰 배수에 대한 코사인은 작은 배수의 코사인으로 되접힌다. 즉 $n\phi = 2\pi$이면 $\cos(n-k)\phi = \cos k\phi$이다. 따라서 코사인들의 합을 곱을 합으로 바꾸는 공식(product formula)으로 제곱하거나 서로 곱하면, 모든 것이 다시 같은 몇 개의 코사인으로 모인다. 후반부에서는 여덟 개의 코사인 $\cos\theta, \ldots, \cos 8\theta$를 네 개씩 두 묶음으로 나누고, 두 묶음의 합과 곱을 구하여 z를 근(root)으로 갖는 이차방정식(quadratic equation)을 얻는다.

풀이

정오각형(pentagon): $\phi = 2\pi/5$

곱을 합으로 바꾸는 공식 $2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$와 $\cos^2 A = \frac{1}{2}(1+\cos 2A)$를 함께 사용한다. $5\phi = 2\pi$이므로

$$\cos 3\phi = \cos(2\pi - 2\phi) = \cos 2\phi, \qquad \cos 4\phi = \cos(2\pi - \phi) = \cos\phi.$$

따라서

$$\begin{aligned} y^2 &= \cos^2\phi + 2\cos\phi\cos 2\phi + \cos^2 2\phi \\ &= \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\phi) + (\cos 3\phi + \cos\phi) + \tfrac{1}{2}(1+\cos 4\phi) \\ &= \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\phi) + (\cos 2\phi + \cos\phi) + \tfrac{1}{2}(1+\cos\phi) \\ &= 1 + \tfrac{3}{2}(\cos\phi + \cos 2\phi) = 1 + \tfrac{3}{2}y. \end{aligned}$$

양변에 2를 곱하면 요구한 대로 $2y^2 = 3y + 2$를 얻는다.

이 식은 $(2y+1)(y-2) = 0$으로 인수분해되므로 $y = -\frac{1}{2}$ 또는 $y = 2$이다. 그런데 $2\phi = \frac{4\pi}{5}$는 $\frac{\pi}{2}$와 π 사이에 있으므로 $\cos 2\phi < 0$이고, 한편 $\cos\phi \le 1$이다. 따라서 $y < 1$이 되어 $y = 2$는 제외되고,

$$y = \cos\tfrac{2\pi}{5} + \cos\tfrac{4\pi}{5} = -\tfrac{1}{2}.$$

$\theta = 2\pi/17$일 때 코사인들의 합

$\omega = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$라 하자. 드무아브르 정리(de Moivre's theorem)에 의해 $\omega^k = \cos k\theta + \mathrm{i}\sin k\theta$이고, $\omega^{17} = \cos 2\pi + \mathrm{i}\sin 2\pi = 1$이며, $\omega \neq 1$이다. 등비급수(geometric series)의 합을 구하면

$$\sum_{k=0}^{16} \omega^k = \frac{\omega^{17} - 1}{\omega - 1} = 0.$$

실수부(real part)를 취하면 요구한 대로 $\displaystyle\sum_{k=0}^{16} \cos k\theta = 0$을 얻는다.

z의 값

$c_k = \cos k\theta$라 쓰자. $17\theta = 2\pi$이고 코사인은 우함수(even function)이므로

$$c_{17-k} = c_k \quad \text{이고} \quad c_{-k} = c_k,$$

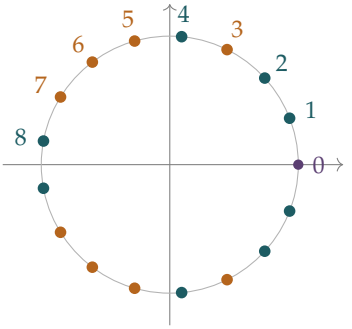
따라서 모든 c_k는 $c_1, c_2, \ldots, c_8$ 중 하나와 같다. 특히 방금 증명한 합에서 $c_0 = 1$을 빼면 $2(c_1 + c_2 + \cdots + c_8) = -1$이 되므로

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_8 = -\tfrac{1}{2}. \qquad (*)$$

z에 들어 있는 각은 $1, 2, 4, 8$이다(각각 앞의 것의 두 배이며, 위와 같이 줄이면 $16 \to 1$이 된다). 나머지 네 개 $3, 5, 6, 7$은 짝이 되는 합

$$w = c_3 + c_5 + c_6 + c_7.$$

을 준다. 그림은 단위원(unit circle) 위의 열일곱 개의 점 ω^k를 보여 준다. 청록색 점(과 그 대칭점)은 z에 들어 있는 코사인을, 호박색 점은 w에 들어 있는 코사인을 나타낸다.



합. $(*)$에 의해 $z+w = c_1 + c_2 + \cdots + c_8 = -\frac{1}{2}$이다.

곱. zw를 전개하면 $a \in \{1,2,4,8\}, b \in \{3,5,6,7\}$인 열여섯 개의 곱 $c_a c_b$가 나오고, 각각은 $\frac{1}{2}(c_{a+b} + c_{a-b})$이다. 각 첨자를 1부터 8까지의 범위로 줄이면($c_{-k} = c_k$와 $c_{17-k} = c_k$를 이용한다) 첨자의 쌍은 다음과 같다.

	$b=3$	$b=5$	$b=6$	$b=7$
$a=1$	4, 2	6, 4	7, 5	8, 6
$a=2$	5, 1	7, 3	8, 4	8, 5
$a=4$	7, 1	8, 1	7, 2	6, 3
$a=8$	6, 5	4, 3	3, 2	2, 1

(예를 들어 $a=8, b=7$이면 c_{15}와 c_1이 나오고, $c_{15} = c_2$이다.)

> **생각해 보기** 어떤 코사인이 나타나는지 알아야 할까, 아니면 몇 번 나타나는지만 알면 될까?

몇 번 나타나는지만 알면 된다. 표를 세어 보면 첨자 $1, 2, \ldots, 8$ 각각이 32개의 항목 가운데 정확히 네 번씩 나타난다. 따라서 $(*)$를 다시 이용하면

$$zw = \tfrac{1}{2} \cdot 4\,(c_1 + c_2 + \cdots + c_8) = 2 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right) = -1,$$

이다.

이차방정식. $z+w = -\frac{1}{2}$이고 $zw = -1$이므로, z와 w는

$$t^2 + \tfrac{1}{2}t - 1 = 0, \qquad \text{즉,} \qquad 2t^2 + t - 2 = 0,$$

의 두 근이다. 따라서 $\{z, w\} = \left\{ \dfrac{-1+\sqrt{17}}{4},\ \dfrac{-1-\sqrt{17}}{4} \right\}$이다. 첫 번째 근은 양수이고 두 번째 근은 음수이다.

근 고르기. $z > 0$임을 보이자. $\frac{4}{17} < \frac{1}{4}$이므로 θ와 2θ는 모두 $(0, \frac{\pi}{4})$에 속하고, 따라서 c_1과 c_2는 모두 $\frac{1}{\sqrt{2}}$보다 크며 $c_1 + c_2 > \sqrt{2} > 1$이다. 또한 $4\theta = \frac{8\pi}{17} < \frac{\pi}{2}$이므로 $c_4 > 0$이고, $c_8 \geq -1$이다. 그러므로

$$z = (c_1 + c_2) + c_4 + c_8 > 1 + 0 - 1 = 0,$$

이고, z는 양수인 근이어야 한다.

$$z = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4} = -\frac{1 - \sqrt{17}}{4}.$$

검산

수치로 계산하면 $\cos 72^\circ + \cos 144^\circ = 0.30902 - 0.80902 = -0.5$이다. $\theta = 2\pi/17$일 때 계산기로 구하면 $z = 0.932472 + 0.739009 + 0.092268 - 0.982973 = 0.780776$이고, $(\sqrt{17} - 1)/4 = 0.780776$이다. 또한 $w = -1.280776 = (-1 - \sqrt{17})/4$이므로, 앞에서 구한 대로 $z + w = -0.5$이고 $zw = -1$이다.

흔한 실수

- 첫 부분에서 $y = 2$를, 또는 두 번째 부분에서 w에 해당하는 근을 제외하는 것을 잊는 경우. 이차방정식은 두 후보를 주므로, 하나를 고르려면 부호에 대한 별도의 논증이 필요하다.
- $(*)$에 $k = 0$을 포함하는 경우. 전체 합은 0이지만 $c_0 = 1$이므로 $c_1 + \cdots + c_{16} = -1$이고, 이를 반으로 나누어야 $-\frac{1}{2}$가 된다.
- 곱의 표에서 첨자를 잘못 줄이는 경우. 예를 들어 c_9를 c_8로 보지 않고 새로운 항으로 취급하는 것이다.

STEP 너머

이것은 정십칠각형(regular 17-gon)을 자와 컴퍼스(ruler and compasses)로 작도할 수 있음을 보인 가우스(Gauss)의 유명한 계산이다. 코사인들을 3(17을 법으로 하는 생성원(generator))의 거듭제곱에 따라 8개, 4개, 2개, 1개짜리의 포개진 묶음으로 나누면 이차방정식의 사슬이 얻어지고, 따라서 $\cos \frac{2\pi}{17}$는 제곱근만을 사용하여 나타낼 수 있다. z와 w는 그 사슬의 첫 단계로, 가우스 주기(Gaussian periods)라고 부른다. 전체 이야기는 갈루아 이론(Galois theory)에 속한다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)를 참고하고, 1의 거듭제곱근(roots of unity)의 산술에 대해서는 Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)을 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.