풀이

STEP II 1991, 문제 3

순수수학 • 대칭 연립방정식

> **STEP II 1991, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q3

핵심 아이디어

서로 같은 세 식에서는 방정식이 두 개 나오는데, 미지수가 세 개이므로 x, y, z 자체를 구하기는 기대할 수 없다. 대신 할 수 있는 것은 순환 대칭(cyclic symmetry)을 활용하는 것이다. 식을 두 개씩 짝지어 빼면 각 차 $x-y$가 다음 차 $y-z$의 배수로 바뀌고, 이렇게 얻은 세 관계식을 모두 곱하면 거의 모든 것이 약분된다. 두 번째 결과를 위해서는 공통값에 k라는 이름을 붙이고 분모를 없애면 순환적인 일차 관계식 세 개가 나오며, 이 식들이 xyz를 세 가지 다른 방식으로 결정한다.

풀이

$x^2y^2z^2 = 1$임을 보이기

처음 두 식을 같다고 놓으면

$$x - y = \frac{1}{z} - \frac{1}{y} = \frac{y-z}{yz}.$$

같은 방법으로 두 번째와 세 번째 식, 그리고 세 번째와 첫 번째 식을 같다고 놓으면

$$y - z = \frac{1}{x} - \frac{1}{z} = \frac{z-x}{zx}, \qquad z - x = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{x-y}{xy}.$$

이 세 방정식을 모두 곱하면

$$(x-y)(y-z)(z-x) = \frac{(y-z)(z-x)(x-y)}{x^2y^2z^2}.$$

x, y, z가 서로 다르므로 곱 $(x-y)(y-z)(z-x)$는 0이 아니고, 따라서 양변을 이것으로 나눌 수 있다. 그러면 $1 = 1/(x^2y^2z^2)$, 즉

$$x^2y^2z^2 = 1,$$

이 되어 증명이 끝난다.

> **생각해 보기** x, y, z가 서로 다르고 0이 아니라는 조건은 정확히 어디에서 쓰였는가?

0이 아니라는 조건은 분수 $1/x, 1/y, 1/z$가 애초에 의미를 갖기 위해 필요하다. 서로 다르다는 조건은 $(x-y)(y-z)(z-x)$를 약분할 수 있게 해 준다. 이 조건이 없으면 결과가 성립하지 않는다. 예를 들어 $x = y = z = 2$는 방정식을 만족하지만 $x^2y^2z^2 = 64$이다.

공통값은 ± 1이다

공통값을 k라 하면

$$x + \frac{1}{y} = k, \qquad y + \frac{1}{z} = k, \qquad z + \frac{1}{x} = k.$$

각 식에 차례로 y, z, x를 곱하면(모두 0이 아니다)

$$xy = ky - 1, \qquad yz = kz - 1, \qquad zx = kx - 1. \tag{$*$}$$

이제 이 중 첫 번째 식에 z를 곱하고, 두 번째 식을 이용해 yz를 바꾸어 넣는다.

$$\begin{aligned} xyz &= k\,yz - z \\ &= k(kz - 1) - z \\ &= (k^2 - 1)z - k. \end{aligned}$$

관계식 $(*)$는 $x \to y \to z \to x$로 바꾸어도 변하지 않으므로, 두 번째와 세 번째 관계식에서 시작하여 같은 계산을 하면

$$xyz = (k^2 - 1)x - k, \qquad xyz = (k^2 - 1)y - k.$$

xyz에 대한 처음 두 식을 빼면

$$(k^2 - 1)(z - x) = 0.$$

$z \neq x$이므로 $k^2 = 1$이어야 하고, 따라서 $x + \frac{1}{y}$의 값은 $+1$ 또는 -1이다. 이로써 증명이 끝난다.

덤으로, $k^2 = 1$을 다시 대입하면 $xyz = -k$를 얻는다. 이때 $x^2y^2z^2 = k^2 = 1$이므로, 이것은 첫 번째 결과에 이르는 또 다른 경로이기도 하다.

검산

두 값 모두 실제로 나타난다. $k = 1$일 때, 0과 1이 아닌 임의의 $x \neq 0, 1$에서 시작하여 $y = \frac{1}{1-x}$, $z = \frac{1}{1-y} = \frac{x-1}{x}$로 놓는다. 그러면 $z + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} + \frac{1}{x} = 1$이므로 세 식이 모두 1이

된다. 예를 들어 $x = 2$이면 $y = -1, z = \frac{1}{2}$이고, 실제로 $2 - 1 = -1 + 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$이며 $xyz = -1 = -k$이다. (x, y, z)를 $(-x, -y, -z)$로 바꾸면 $(-2, 1, -\frac{1}{2})$처럼 $k = -1$인 해를 얻는다. 이 경우 세 수는 항상 서로 다른데, $x = \frac{1}{1-x}$이려면 $x^2 - x + 1 = 0$이어야 하고 이 방정식은 실근을 갖지 않기 때문이다. 이러한 세 수의 쌍 약 4000개를 정확한 분수로 확인하였으며, 매번 $x^2y^2z^2 = 1$과 $xyz = -k$가 성립함을 확인하였다.

흔한 실수

- $(x - y)(y - z)(z - x)$가 왜 0이 아닌지 밝히지 않고 이것으로 나누는 것. 서로 다르다는 조건은 바로 이를 위해 주어진 것이다.
- $xyz = \pm 1$ 대신 $xyz = 1$이라고 결론짓는 것. 실제로는 $xyz = -k$이므로, 공통값이 1이면 $xyz = -1$이다.

STEP 너머

사상 $t \mapsto \dfrac{1}{k - t}$는 x를 y로, y를 z로, z를 다시 x로 보낸다. 이것은 행렬 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & k \end{pmatrix}$에 대응하는 뫼비우스 변환(Möbius transformation)이며, 이러한 사상의 합성은 행렬의 곱에 대응한다. 이 문제가 실제로 묻는 것은 이 사상이 언제 3-주기(cycle)를 갖는가이며, 그 답 $k^2 = 1$은 정확히 행렬의 세제곱이 단위행렬(identity matrix)의 상수배가 되는 경우이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)에는 뫼비우스 변환과, 행렬의 대각합(trace)에 따른 그 분류를 다룬 아름다운 장이 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.