풀이

STEP II 1991, 문제 2

순수수학 • 쌍곡선의 점근선

> **STEP II 1991, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q2

핵심 아이디어

이차 부분 $3y^2 - 10xy + 3x^2$는 $(3y - x)(y - 3x)$로 인수분해(factorisation)되며, 이것이 문제의 전부이다. 일차항까지 포함하도록 인수분해를 완성하면 곡선은 "두 일차식의 곱 $= 1$"의 꼴이 된다. 곡선을 따라 멀리 나아가면 한 인수는 한없이 커져야 하므로 다른 인수는 0으로 가야 하고, 그 인수를 0으로 놓은 것이 점근선(asymptote)이다. 이것이 바로 힌트에서 요구하는 "극한에서 s와 t 사이의 관계"이다.

풀이

접선

$(\dagger)$를 x에 대하여 음함수 미분(implicit differentiation)하면

$$6y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 10y - 10x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 6x + 16\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 16 = 0,$$

이므로

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{10y - 6x + 16}{6y - 10x + 16} = \frac{5y - 3x + 8}{3y - 5x + 8}.$$

점 (s, t)에서의 기울기(gradient)는 $m = \dfrac{5t - 3s + 8}{3t - 5s + 8}$이고, 접선(tangent)은 $y = mx + (t - ms)$이다. 절편(intercept)을 통분하면

$$t - ms = \frac{t(3t - 5s + 8) - s(5t - 3s + 8)}{3t - 5s + 8} = \frac{3t^2 - 10st + 3s^2 + 8t - 8s}{3t - 5s + 8}.$$

(s,t)가 곡선 위에 있으므로 $3t^2-10st+3s^2 = -16t+16s-15$이고, 따라서 분자는 $-8t+8s-15 = -(8t-8s+15)$이다. 그러므로 접선은

$$y = \left(\frac{5t-3s+8}{3t-5s+8}\right)x - \left(\frac{8t-8s+15}{3t-5s+8}\right),$$

이며, 이것이 보이려던 것이다. ($3t-5s+8=0$인 곳에서는 접선이 수직이므로, 이 식은 분모를 없앤 꼴로 읽어야 한다.)

점근선

(†)를 $(3y-x+a)(y-3x+b)+k=0$의 꼴로 써 보자. 전개하면

$$(3y-x+a)(y-3x+b) = 3y^2-10xy+3x^2+(3b+a)y-(b+3a)x+ab,$$

이므로 $3b+a=16$, $b+3a=16$이어야 하고, 이로부터 $a=b=4$, $ab=16$을 얻는다. 따라서 (†)는

$$(3y-x+4)(y-3x+4)=1.$$

이다. 점 (s,t)에 대하여

$$u=3t-s+4, \qquad v=t-3s+4, \qquad \text{이라 두면} \qquad uv=1.$$

이다. 접선의 식에 나오는 모든 식은 u, v와 상수의 결합으로 나타낼 수 있다. t와 s의 계수를 비교하면

$$\begin{aligned} 5t-3s+8 &= \tfrac{1}{2}(3u+v),\\ 3t-5s+8 &= \tfrac{1}{2}(u+3v),\\ 8t-8s+15 &= 2(u+v)-1 = 2(u+v)-uv, \end{aligned}$$

이며, 마지막 식에서는 $uv=1$을 이용하였다. 따라서 접선의 기울기와 절편은

$$m=\frac{3u+v}{u+3v}, \qquad c=\frac{8t-8s+15}{3t-5s+8}=\frac{2(2u+2v-uv)}{u+3v}.$$

이다.

? **생각해 보기** $s\to\infty$일 때 u와 v는 어떻게 되는가?

t를 소거하면 $u-3v=8s-8$이므로 $u-3v\to\infty$이다. $uv=1>0$이므로 u와 v는 부호가 같다.

- 둘 다 양수이면 $u-3v\to\infty$에서 $u\to\infty$일 수밖에 없고, 그러면 $v=1/u\to 0$이다.
- 둘 다 음수이면 $u-3v=3|v|-|u|\to\infty$에서 $|v|\to\infty$일 수밖에 없고, 그러면 $u=1/v\to 0$이다.

이것이 힌트가 원하는 관계이다. 한 가지(branch)에서는 $t-3s+4\to 0$이고, 다른 가지에서는 $3t-s+4\to 0$이다.

$v\to 0, u\to\infty$인 경우. 분자와 분모를 u로 나누면

$$m=\frac{3+v/u}{1+3v/u}\to 3,\qquad c=\frac{2(2+2v/u-v)}{1+3v/u}\to 4,$$

이므로 극한(limit)에서의 접선은 $y=3x-4$이다.

$u\to 0, v\to\infty$인 경우. 분자와 분모를 v로 나누면

$$m=\frac{3u/v+1}{u/v+3}\to \tfrac{1}{3},\qquad c=\frac{2(2u/v+2-u)}{u/v+3}\to \tfrac{4}{3},$$

이므로 극한에서의 접선은 $y=\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}$, 즉 $3y=x-4$이다.

따라서 점근선은 $y=3x-4$와 $3y=x-4$이다. (대신 $s\to-\infty$로 보내면 두 경우의 역할이 바뀔 뿐 같은 두 직선을 얻는다.) 이 직선들이 정확히 $v=0$과 $u=0$이라는 점에 주목하자. 인수분해된 꼴을 보면 곧바로 알 수 있다.

각과 축

직선 $y=3x-4$의 기울기는 3이므로, 이 직선이 x축과 이루는 각 θ는 $\tan\theta=3$을 만족한다. 그러면 이 직선이 y축과 이루는 각은 $\frac{\pi}{2}-\theta$이고, $\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cot\theta=\frac{1}{3}$이다. 직선 $3y=x-4$의 기울기는 $\frac{1}{3}$이므로 이 직선이 x축과 이루는 각은 $\arctan\frac{1}{3}$이고, 이는 첫 번째 점근선과 y축 사이의 각과 같다.

? 생각해 보기 이것으로부터 왜 이등분선을 알 수 있는가?

직선 $y=x$에 대한 대칭이동은 x축과 y축을 맞바꾸고, 방금 보인 것에 따르면 두 점근선의 방향도 맞바꾼다. 즉 방향 $(1,3)$은 $(3,1)$로 옮겨진다. 따라서 두 점근선이 이루는 각은 $y=x$의 방향에 대하여 대칭이고, $y=x$가 그 각을 이등분한다. 실제로 점근선의 방향은 x축으로부터 $\arctan 3$과 $\arctan\frac{1}{3}$만큼 기울어져 있고, 이는 $\frac{\pi}{4}\pm(\arctan 3-\frac{\pi}{4})$이다. 다른 이등분선은 첫 번째 이등분선에 수직이다. 따라서 이등분선(bisector)의 기울기는 1과 -1이다.

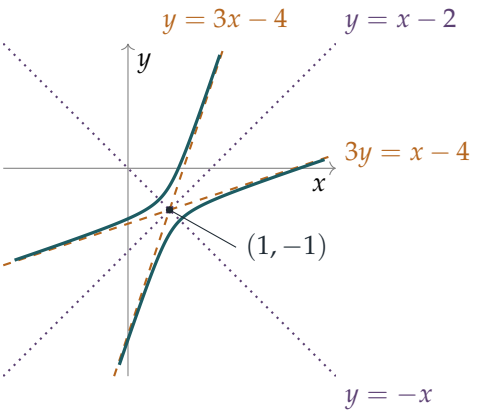
쌍곡선(hyperbola)의 축은 점근선들이 만나는 점인 중심(centre)을 지나는, 점근선이 이루는 각의 이등분선이다. $y=3x-4$와 $3y=x-4$를 연립하면 $9x-12=x-4$이므로 $x=1$, $y=-1$이다. 중심은 $(1,-1)$이고, 축은

$$y+1=x-1\iff y=x-2,\qquad y+1=-(x-1)\iff y=-x.$$

이다.

어느 것이 어느 축인지 알아보자. $y=-x$ 위에서는 $u=v=4-4x$이므로 $uv=1$에서 $x=1\pm\frac{1}{4}$를 얻고, 꼭짓점(vertex)은 $(\frac{5}{4},-\frac{5}{4})$와 $(\frac{3}{4},-\frac{3}{4})$이다. 따라서 $y=-x$가 주축(transverse

axis)이다. $y = x - 2$ 위에서는 $u = 2x - 2 = -v$이므로 $uv = -(2x-2)^2 \le 0$이고, 이 직선(켤레축(conjugate axis))은 곡선과 만나지 않는다.



검산

- 점 $(\frac{5}{4}, -\frac{5}{4})$는 (†)를 만족한다. $3 \cdot \frac{25}{16} + 10 \cdot \frac{25}{16} + 3 \cdot \frac{25}{16} - 20 - 20 + 15 = 25 - 25 = 0$.
- 수치적으로 $u = 10^8$로 두면($s \approx 1.25 \times 10^7$) 접선 공식에서 기울기 3.0000000과 절편 항 3.99999998을 얻고, $u = -10^{-8}$로 두면 0.33333333과 1.33333334를 얻는다.
- 중심 $(1, -1)$에서는 $u = v = 0$이므로 중심은 곡선 위에 있지 않다. 접선 공식이 결코 $0/0$이 되지 않는 이유가 바로 이것이다.

흔한 실수

- ($t \approx ks$로 두고) $3k^2 - 10k + 3 = 0$에서 기울기 3과 $\frac{1}{3}$만 구하고, 절편을 구하려면 그다음 항이 필요하다는 것을 잊는 것. 단지 $t \approx 3s$가 아니라 $t = 3s - 4 + o(1)$이다.
- 이등분선을 중심 $(1, -1)$이 아니라 원점을 지나도록 잡는 것.

STEP 너머

모든 이차곡선(conic) $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$은 대칭행렬(symmetric matrix) $A = \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}$를 써서 $\mathbf{x}^\mathsf{T} A \mathbf{x} + \ldots$의 꼴로 쓸 수 있고, 그 축은 A의 고유벡터(eigenvector) 방향을 향한다. 여기서 $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$의 고유벡터는 $(1, 1)$과 $(1, -1)$이

고, 고윳값(eigenvalue)은 부호가 서로 반대인 -2와 8이며, 이 때문에 곡선이 쌍곡선이 된다. 이처럼 이차형식(quadratic form)을 대각화(diagonalisation)하는 것은 대학 1학년 선형대수학(linear algebra)의 핵심 주제이다. Strang, *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.