풀이

STEP II 1991, 문제 14

역학 • 상대 속도와 추격

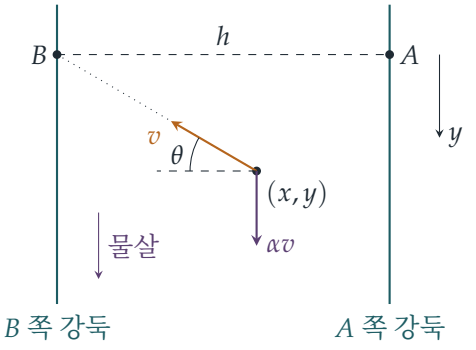
> **STEP II 1991, 14번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q14

핵심 아이디어

배의 지면에 대한 속도(ground velocity)는 물에 대한 배의 속도에 물의 속도를 더한 것이다. "항상 B를 향한다"는 것은 기하학적 조건 $y = x\tan\theta$이고, 이를 미분하면 같은 속도에 대한 두 번째 표현을 얻는다. 두 표현을 맞추면 x와 θ를 잇는 변수분리형(separable) 방정식이 나온다. 치환(substitution) $\tan\theta = \sinh(\alpha s)$를 택하는 까닭은 이 치환이 $\sec\theta + \tan\theta$를 지수함수로 만들어 주어, 모든 것이 s의 간단한 지수함수로 바뀌기 때문이다.

풀이

배를 질점(particle)으로 모형화한다. B를 원점으로 잡고, x는 B 쪽 강둑에서 A 쪽으로 재고 y는 하류 방향으로 재어, A가 $(h, 0)$에 있고 배가 거기서 출발하도록 한다.



θ로 나타낸 속도

배는 B 쪽 강둑을 향하되, (떠밀림을 상쇄하기 위해) 상류 쪽으로 기울어 방향 AB와 각 θ를 이룬다. 따라서 물에 대한 배의 속도는 우리의 (x, y) 성분으로 단위벡터(unit vector) $-(\cos\theta, \sin\theta)$ 방향으로 크기 v이다. 여기에 y 방향으로 αv인 물살을 더하면

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v\cos\theta \\ \alpha v - v\sin\theta \end{pmatrix}.$$

B를 향하기

(x, y)에 있는 배에서 B로 향하는 방향은 $(-x, -y)$ 방향이고, 이것이 AB와 각 θ를 이루는 것은 정확히 $\tan\theta = y/x$일 때이다. 따라서 운동하는 내내

$$y = x\tan\theta.$$

곱의 미분법(product rule)과 연쇄법칙(chain rule)으로 t에 대해 미분하면

$$\dot{y} = \tan\theta\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x\sec^2\theta\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t},$$

이므로 속도 벡터 $(\dot{x}, \dot{y})$는 요구된 꼴을 가진다.

x와 θ에 대한 미분방정식

이제 두 표현을 맞춘다. x 성분에서 $\dot{x} = -v\cos\theta$를 얻는다. 이를 y 성분에 대입하면

$$\begin{aligned} \tan\theta\,(-v\cos\theta) + x\sec^2\theta\,\dot{\theta} &= \alpha v - v\sin\theta \\ x\sec^2\theta\,\dot{\theta} &= \alpha v, \qquad (*) \end{aligned}$$

인데, $\tan\theta\cos\theta = \sin\theta$이므로 $-v\sin\theta$ 항이 소거되기 때문이다. 특히 $\dot{\theta} > 0$이므로 θ는 0에서부터 꾸준히 증가하고, 따라서 x를 θ의 함수로 다룰 수 있다. 나누면

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\dot{x}}{\dot{\theta}} = \frac{-v\cos\theta\cdot x\sec^2\theta}{\alpha v} = -\frac{x\sec\theta}{\alpha}, \qquad \text{따라서} \qquad \alpha\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = -x\sec\theta,$$

로 요구된 식을 얻는다.

x 구하기

이 방정식은 변수분리가 된다(배가 도착할 때까지 $x > 0$이다).

$$\alpha\int\frac{\mathrm{d}x}{x} = -\int\sec\theta\,\mathrm{d}\theta \quad\Longrightarrow\quad \alpha\ln x = -\ln(\sec\theta + \tan\theta) + C,$$

여기서 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$에서 성립하는 표준 적분 $\int\sec\theta\,\mathrm{d}\theta = \ln(\sec\theta + \tan\theta)$를 사용하였다. 출발할 때 배는 A에 있고 거기서 $x = h, \theta = 0$이므로 $C = \alpha\ln h$이다. 따라서

$$\alpha\ln\frac{x}{h} = -\ln(\sec\theta + \tan\theta), \qquad \text{즉,} \qquad \left(\frac{x}{h}\right)^{\alpha} = (\sec\theta + \tan\theta)^{-1}.$$

치환 $\tan\theta = \sinh(\alpha s)$

> **생각해 보기** $\sec\theta$를 s로 나타내면 무엇인가?

$\sec^2\theta = 1+\tan^2\theta = 1+\sinh^2(\alpha s) = \cosh^2(\alpha s)$이고, $(0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$이므로$)$ $\sec\theta$와 $\cosh(\alpha s)$가 모두 양수이므로 $\sec\theta = \cosh(\alpha s)$를 얻는다. 그러면

$$\sec\theta + \tan\theta = \cosh(\alpha s) + \sinh(\alpha s) = \mathrm{e}^{\alpha s},$$

이므로 $(x/h)^\alpha = \mathrm{e}^{-\alpha s}$이고, α제곱근을 취하면 $x = h\mathrm{e}^{-s}$이다.

변화율에 대한 식을 얻기 위해 $\tan\theta = \sinh(\alpha s)$를 t에 대해 미분하면

$$\sec^2\theta\,\dot\theta = \alpha\cosh(\alpha s)\,\dot s.$$

이것과 $x = h\mathrm{e}^{-s}$를 $(*)$에 대입하면 $h\mathrm{e}^{-s}\cdot\alpha\cosh(\alpha s)\,\dot s = \alpha v$이고, α로 나누면

$$h\mathrm{e}^{-s}\cosh(\alpha s)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v,$$

로 요구된 식을 얻는다.

건너는 데 걸리는 시간

A에서 $\theta = 0$이므로 $s = 0$이다. $\dot s > 0$이므로 s는 증가하고, 배는 $x = h\mathrm{e}^{-s} \to 0$일 때, 즉 $s \to \infty$일 때 B에 도달한다. (배는 실제로 B에 도착한다. $\alpha < 1$이므로 $y = x\tan\theta = h\mathrm{e}^{-s}\sinh(\alpha s) \to 0$이기 때문이다.) 변수를 분리하면 건너는 데 걸리는 시간은

$$\begin{aligned} T &= \frac{h}{v}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s}\cosh(\alpha s)\,\mathrm{d}s = \frac{h}{2v}\int_0^\infty (\mathrm{e}^{-(1-\alpha)s} + \mathrm{e}^{-(1+\alpha)s})\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{h}{2v}\left(\frac{1}{1-\alpha}+\frac{1}{1+\alpha}\right) = \frac{h}{2v}\cdot\frac{2}{1-\alpha^2} = \frac{h}{v(1-\alpha^2)}, \end{aligned}$$

이며, $1-\alpha > 0$이므로 두 적분은 모두 수렴(converge)한다. 따라서 건너는 데 걸리는 시간은 $hv^{-1}(1-\alpha^2)^{-1}$이다.

검산

- 물살이 없으면$(\alpha = 0)$ 배는 곧장 건너가고 $T = h/v$이며, 당연히 그래야 한다. $\alpha \to 1$이면 시간이 한없이 커진다. 물살보다 빠르지 않은 배는 B 근처에서 곧장 상류를 향하게 되는데, 그곳에서는 물살을 거슬러 결코 나아갈 수 없다.
- 운동을 수치적으로 한 단계씩 계산해 보았다(4차 룽게–쿠타(Runge–Kutta) 방법, 매 단계마다 B를 향해 방향을 잡음). $h = v = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$일 때 배는 $t \approx 1.33333$에 도착하며, 이는 $1/(1-\frac{1}{4}) = \frac{4}{3}$과 일치한다. 경로를 따라 $(x/h)^\alpha(\sec\theta+\tan\theta)$는 약 10^{-13} 이내로 1을 유지하였다.

흔한 실수

- 배가 향하는 방향의 y 성분 부호를 틀리는 것. 배는 하류로 떠밀리므로 B를 향한다는 것은 부분적으로 상류를 향한다는 뜻이다. $\theta > 0$일 때 그 성분은 $-v\sin\theta$이다.
- $\sec\theta = +\cosh(\alpha s)$임을 정당화하지 않는 것. 이를 위해서는 θ가 $\frac{\pi}{2}$보다 작게 유지되어야 하는데, θ는 B에서 $x > 0$인 점으로 가는 직선의 각이므로 이 조건이 성립한다.

STEP 너머

이것은 고전적인 **추적 곡선**(*pursuit curve*) 문제이다. 한 물체가 끊임없이 목표를 향해 방향을 잡고, 그 경로는 운동 방향에 대한 미분방정식(differential equation)으로부터 구해진다. 같은 아이디어로 움직이는 주인을 쫓는 개나 목표물을 추적하는 미사일을 기술할 수 있으며, 이는 자연스럽게 트랙트릭스(tractrix)와 같은 곡선으로 이어진다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 상대 속도(relative velocity)와 움직이는 좌표계에서 운동 방정식(equations of motion)을 세우는 일에 익숙해지기에 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.