풀이

STEP II 1991, 문제 13

역학 • 강체의 회전

> **STEP II 1991, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q13

핵심 아이디어

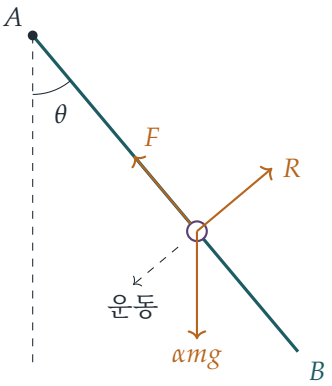
고리가 미끄러지기 전까지 막대와 고리는 A를 축으로 하는 하나의 강체(rigid body)처럼 함께 움직인다. 따라서 결합된 물체의 각속도(angular speed)는 에너지로부터, 각가속도(angular acceleration)는 모멘트(moments)로부터 구할 수 있다. 그런 다음 이를 이용하여 고리가 막대와 함께 움직이도록 막대가 고리에 가해야 하는 힘을 계산한다. 고리는 필요한 마찰력이 수직항력의 μ배 이하인 동안에만 제자리에 있으며, 이 조건이 처음으로 깨지는 각에서 미끄러지기 시작한다.

풀이

모형

고리는 A로부터 거리 x에 있는 질점(particle)으로, 회전축은 매끄러운 것으로, 막대는 강체로 다룬다. 막대와 연직 아래 방향 사이의 각을 θ라 하면, 놓는 순간 $\theta = \frac{\pi}{2}$이고 막대가 아래로 흔들려 내려감에 따라 θ는 감소한다. 각속도를 $\omega = |\dot{\theta}|$, 각가속도의 크기를 $\beta = |\ddot{\theta}|$로 쓴다.

막대는 고리에 두 힘을 가한다. 하나는 막대에 수직인 수직항력(normal reaction) R로, 고리가 움직이는 방향을 양으로 잡는다. 다른 하나는 막대를 따라 작용하는 마찰력(friction force) F로, A를 향하는 방향을 양으로 잡는다. 고리는 막대에 꿰어져 있으므로 R의 부호는 양과 음 어느 쪽이든 될 수 있다.



그림에서 R는 운동과 반대 방향으로 그려져 있는데, $k^2 > xd$일 때 실제로 그렇게 되기 때문이다. 그러나 식 계산에서는 부호를 일반적으로 둔다.

강체의 운동

고리가 막대에 고정되어 있을 때 A에 대한 관성 모멘트(moment of inertia)는 $mk^2 + \alpha m x^2 = m(k^2 + \alpha x^2)$이다. 놓은 순간부터 막대의 질량 중심(centre of mass)은 $d\cos\theta$만큼, 고리는 $x\cos\theta$만큼 내려왔으므로, 에너지 보존(conservation of energy)에 의해

$$\tfrac{1}{2}m(k^2 + \alpha x^2)\,\omega^2 = mg(d + \alpha x)\cos\theta \quad \Longrightarrow \quad \omega^2 = \frac{2g(d + \alpha x)\cos\theta}{k^2 + \alpha x^2}.$$

A에 대한 모멘트를 취하면(회전축의 힘은 모멘트가 없다) 무게들의 모멘트의 합은 $mg(d + \alpha x)\sin\theta$이므로

$$\beta = \frac{g(d + \alpha x)\sin\theta}{k^2 + \alpha x^2}.$$

고리에 작용하는 힘

고리는 반지름 x인 원 위를 움직인다. 그 가속도는 막대를 따라 A를 향하는 성분 $x\omega^2$와, 막대에 수직이며 운동 방향을 향하는 성분 $x\beta$로 이루어진다. 막대를 따라 바깥으로 향하는 방향은 연직 아래 방향과 각 θ를 이루므로, 무게는 막대를 따라 바깥쪽으로 성분 $\alpha mg\cos\theta$를, 운동 방향으로 성분 $\alpha mg\sin\theta$를 가진다.

막대를 따라 A를 향하는 방향으로: $F - \alpha mg\cos\theta = \alpha m x\omega^2$이므로

$$\begin{aligned} F &= \alpha mg\cos\theta\left(1 + \frac{2x(d + \alpha x)}{k^2 + \alpha x^2}\right) \\ &= \frac{\alpha mg\cos\theta\,(k^2 + 3\alpha x^2 + 2xd)}{k^2 + \alpha x^2}. \end{aligned}$$

막대에 수직이며 운동 방향으로:

$$R + \alpha mg\sin\theta = \alpha m x\beta \quad \Longrightarrow \quad R = \alpha mg\sin\theta\left(\frac{x(d + \alpha x)}{k^2 + \alpha x^2} - 1\right) = \frac{\alpha mg\sin\theta\,(xd - k^2)}{k^2 + \alpha x^2}.$$

R에서 αx^2 항들이 상쇄된다는 점에 주목하자. 이 때문에 $k^2 - xd$만 나타난다.

? **생각해 보기** 고리는 어느 쪽으로 미끄러지려 하며, R의 부호는 무엇을 뜻하는가?

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$에서 $F > 0$이다. 즉 막대는 고리를 A **쪽으로** 당겨야 하므로, 마찰이 충분하지 않으면 고리는 바깥쪽, 곧 B 쪽으로 미끄러진다. $k^2 > xd$이면 $R < 0$이므로 막대가 고리를 붙잡고 있는 셈이다. 고리만 따로 있다면 막대의 이 지점보다 더 빨리 떨어질 것이므로, 막대가 고리를 밀어 막아야 한다.

언제 미끄러지는가?

고리는 $|F| \le \mu|R|$인 동안 막대에 고정되어 있다. $k^2 > xd$일 때 F와 $|R|$는 같은 양의 인수 $\alpha mg/(k^2 + \alpha x^2)$를 가지므로, 조건은

$$\cos\theta\,(k^2 + 3\alpha x^2 + 2xd) \le \mu \sin\theta\,(k^2 - xd), \quad \text{즉,} \quad \mu \tan\theta \ge \frac{3\alpha x^2 + k^2 + 2xd}{k^2 - xd}.$$

놓는 순간 $\theta = \frac{\pi}{2}$이고 $F = 0$이므로 고리는 곧바로 미끄러지지 않는다. θ가 $\frac{\pi}{2}$에서 0으로 감소함에 따라 $\mu\tan\theta$는 $+\infty$에서 0으로 단조 감소하고, 우변은 고정된 양수이다. 따라서 부등식은 다음을 만족하는 유일한 각에서 처음으로 깨지고, 고리는 바깥쪽으로 미끄러지기 시작한다.

$$\boxed{\mu \tan\theta = \frac{3\alpha x^2 + k^2 + 2xd}{k^2 - xd}}$$

이로써 요구된 결과를 얻는다. 고리는 막대가 연직 위치에 이르기 전에 항상 미끄러진다.

소문항 (i): $k^2 = xd$

이제 모든 각에서 $R = 0$이므로 낼 수 있는 최대 마찰력 $\mu|R|$는 0이다. 그런데 $\theta < \frac{\pi}{2}$가 되자마자 $F > 0$이다. 따라서 μ의 값에 관계없이 고리는 **막대를 놓자마자** 막대를 따라 바깥쪽으로 미끄러지기 시작한다. 물리적으로 보면, 놓는 순간 A로부터 거리 $x = k^2/d$에 있는 막대의 지점은 정확히 가속도 g로 떨어지기 시작한다($\theta = \frac{\pi}{2}$에서 $x\beta = g$이므로). 그래서 고리는 막대의 어느 쪽 면도 누르지 않으며, 마찰이 작용할 통로가 없다.

소문항 (ii): $k^2 < xd$

이제 $R > 0$이다. 놓는 순간 막대의 이 지점은 g보다 빨리 떨어지려 하므로, 막대가 고리를 운동 방향으로 밀어 준다. 고리는 이번에도 바깥쪽으로 미끄러지려 하며, 조건 $F \le \mu R$는

$$\mu \tan\theta \ge \frac{3\alpha x^2 + k^2 + 2xd}{xd - k^2}.$$

가 된다. 앞과 같은 논증으로, 고리는 처음에는 버티다가

$$\mu \tan\theta = \frac{3\alpha x^2 + k^2 + 2xd}{xd - k^2},$$

일 때 바깥쪽으로 미끄러지기 시작한다. 이는 주어진 결과에서 $k^2 - xd$를 $|k^2 - xd|$로 바꾼 것이다. 유일한 차이는 이제 수직항력이 고리의 반대쪽 면에 작용한다는 것이다.

검산

- $k^2 > xd$일 때 $\mu \to \infty$이면 미끄러지는 각은 $\theta \to 0$이다. 즉 매우 거친 막대는 고리를 거의 맨 아래까지 붙잡아 둔다. $k^2 - xd \to 0$이면 그 각은 $\frac{\pi}{2}$로 가며, 이는 소문항 (i)과 일치한다.
- 길이가 $2a$인 균일한 막대는 $d = a, k^2 = \frac{4}{3}a^2$이므로, 임계 위치 $x = k^2/d = \frac{4}{3}a$는 타격 중심(centre of percussion), 곧 막대를 놓았을 때 자유 낙하로 출발하는 점이다.
- 수치적으로, 강체 운동을 적분하고 유한 차분(finite differences)으로 고리의 가속도를 계산하여, 임의의 매개변수 값에 대해 F와 R를 10^{-5} 이내로 재현하였다. 예를 들어 $k^2 - xd \approx 2.87$일 때 고리는 $\theta \approx 1.3270$에서 처음으로 $\mu|R|$보다 큰 힘을 필요로 했으며, 이는 공식과 일치한다. $k^2 < xd$인 경우들도 같은 방식으로 (ii)의 공식과 일치하였다.

흔한 실수

- 관성 모멘트와 무게의 모멘트에 대한 고리 자신의 기여를 빠뜨리는 것. 고리는 미끄러지기 전까지 강체의 일부이다.
- 마찰 법칙에 실제 수직항력 R 대신 무게의 수직 성분을 쓰는 것. 여기서 R는 각가속도에도 의존한다.
- 막대를 따르는 방정식에서 구심(centripetal) 항 $x\omega^2$를 빠뜨리는 것. $3\alpha x^2$의 인수 3은 바로 여기서 나온다.

STEP 너머

회전축으로부터 거리 k^2/d에 있는 점이 **타격 중심**이다. 그 점을 치면 회전축에 충격 반작용(impulsive reaction)이 생기지 않으며, 이 때문에 크리켓 배트나 테니스 라켓에 "스위트 스폿(sweet spot)"이 있다. 이 거리는 또한 복진자(compound pendulum)와 주기가 같은 단진자(simple pendulum)의 길이이기도 하다. 여기서 쓴 방법, 즉 강체의 운동을 먼저 구한 뒤 그 운동을 유지하는 데 필요한 내력이 무엇인지 묻는 방법은 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)에서 구속력을 분석하는 기초이다. 강체의 회전과 복진자에 대해 더 알고 싶다면 Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 읽어 보자.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.