풀이

STEP II 1991, 문제 12

역학 • 강제 탄성 진동

> **STEP II 1991, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q12

이 문제는 *Beyond STEP*의 11.1 절 **공명**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch11/resonance.html

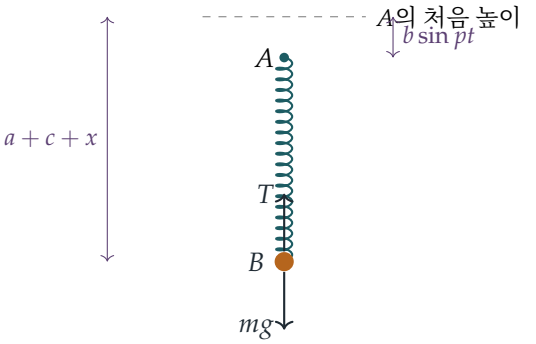
핵심 아이디어

장력은 오직 **늘어난 길이**(extension)에만 의존한다. 늘어난 길이는 입자의 위치에서 움직이는 끝점의 위치를 빼고, 다시 자연 길이(natural length)를 뺀 값이다. 이것을 x와 $b\sin pt$로 나타내고, 처음 평형(equilibrium) 상태를 이용해 탄성 계수(modulus of elasticity)를 c가 들어간 식으로 바꾸면 운동 방정식이 바로 나온다. 그 결과는 강제 단순 조화 진동자(forced simple harmonic oscillator)이다. 여함수(complementary function)에 특수해(particular solution)를 더해서 풀고, "팽팽하다(taut)"는 것이 "늘어난 길이가 결코 음수가 되지 않는다"는 뜻임을 기억하자.

풀이

운동 방정식

입자를 질량 m인 점으로, 줄을 훅의 법칙(Hooke's law)을 따르는 탄성 계수 λ의 가벼운 탄성 줄로 모형화한다. 모든 위치는 A의 처음 위치에서부터 아래쪽으로 잰다.



처음 평형 상태에서 늘어난 길이는 c이고 장력이 무게와 균형을 이룬다.

$$\frac{\lambda c}{a} = mg, \qquad \text{따라서} \qquad \frac{\lambda}{ma} = \frac{g}{c} = n^2.$$

시각 t에서 입자는 깊이 $a + c + x$에 있고 끝점 A는 깊이 $b \sin pt$에 있다. 줄이 팽팽한 동안 줄의 길이는 $a + c + x - b \sin pt$이므로 늘어난 길이는

$$e = c + x - b \sin pt,$$

이고 장력은 $T = \lambda e/a$이다. 입자에 대해 아래 방향으로 힘을 분해하면

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} &= mg - \frac{\lambda}{a}(c + x - b \sin pt) \\ &= mg - \frac{\lambda c}{a} - \frac{\lambda}{a}(x - b \sin pt) \\ &= -\frac{\lambda}{a}(x - b \sin pt), \end{aligned}$$

이다. 여기서 $\lambda c/a = mg$를 이용했다. 양변을 m으로 나누고 $\lambda/(ma) = n^2$을 이용하면

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -n^2(x - b \sin pt),$$

이 되어 요구된 식을 얻는다. 이 식은 $e \geq 0$일 때에만 성립한다. 줄이 느슨해지면 장력은 $\lambda e/a$가 아니라 0이 되기 때문이다.

$x(t)$ 구하기

방정식을 $\ddot{x} + n^2x = n^2b \sin pt$로 다시 쓴다. 여함수는 $C \cos nt + D \sin nt$이다. 특수해로 $x = K \sin pt$를 시도하면

$$-p^2K + n^2K = n^2b \quad \Longrightarrow \quad K = \frac{n^2b}{n^2 - p^2},$$

이다. $p < n$이므로 $n^2 - p^2 \neq 0$이어서 이것은 타당하다. 따라서

$$x = \frac{n^2b}{n^2 - p^2} \sin pt + C \cos nt + D \sin nt.$$

$t = 0$에서 입자는 평형 위치에 정지해 있으므로 $x(0) = 0$이고 $\dot{x}(0) = 0$이다. 첫 번째 조건에서 $C = 0$을 얻는다. 두 번째 조건에서

$$\frac{n^2bp}{n^2 - p^2} + nD = 0 \quad \Longrightarrow \quad D = -\frac{nbp}{n^2 - p^2}.$$

을 얻는다. 그러므로

$$x(t) = \frac{bn}{n^2 - p^2}(n \sin pt - p \sin nt),$$

이 되어 요구된 식을 얻는다.

줄이 팽팽하게 유지되는 조건

생각해 보기 양수로 유지되어야 하는 것은 정확히 무엇인가? x인가, 장력인가, 아니면 다른 무엇인가?

그것은 늘어난 길이 $e = c + x - b \sin pt$이다. $x(t)$에 대한 식은 $e \geq 0$인 동안에만 운동을 나타내므로, 줄이 내내 팽팽하게 유지될 필요충분조건은 모든 $t \geq 0$에 대해 이 부등식이 성립하는 것이다. x를 대입하면

$$\begin{aligned} x - b \sin pt &= b \sin pt \left(\frac{n^2}{n^2 - p^2} - 1 \right) - \frac{bnp}{n^2 - p^2} \sin nt \\ &= \frac{bp}{n^2 - p^2}(p \sin pt - n \sin nt). \end{aligned}$$

따라서 필요충분조건은

$$c + \frac{bp}{n^2 - p^2}(p \sin pt - n \sin nt) \geq 0 \quad \text{모든} t \geq 0,$$

이고, $n^2 - p^2 > 0$이므로 이는 다음과 동치이다.

$$bp(n \sin nt - p \sin pt) \leq c(n^2 - p^2) \quad \text{모든} t \geq 0.$$

(e가 고립된 순간에만 0에 닿는다면 장력은 그 순간 0이 되지만, 운동 방정식은 여전히 성립하고 줄이 실제로 느슨해지지는 않는다. 그래서 부등식이 등호를 포함한다.)

이제 $pb < (n - p)c$라고 가정하자. 모든 t에 대해 $\sin nt \leq 1$, $-\sin pt \leq 1$이고 $n, p > 0$이므로

$$n \sin nt - p \sin pt \leq n + p.$$

이다. $b > 0$(진폭)으로 잡으면 $bp > 0$이므로

$$bp(n \sin nt - p \sin pt) \leq bp(n + p) < (n - p)c(n + p) = c(n^2 - p^2).$$

이다. 조건이 성립하고, 사실은 등호 없는 부등식으로 성립하므로 줄은 내내 팽팽하게 유지된다. (b가 음수일 수도 있다면, $|n \sin nt - p \sin pt| \leq n + p$이므로 b 대신 $|b|$를 써서 같은 논증이 성립한다.)

검산

- $t = 0$을 대입하면 $x(0) = 0$이고 $\dot{x}(0) = \frac{bn}{n^2-p^2}(np - pn) = 0$이 되어 마땅히 그래야 하는 값이 나온다.
- $p \to 0$이면 끝점 A가 거의 움직이지 않고, $x(t) \approx \frac{bn}{n^2}(npt - pnt) \to 0$이다. 예상대로 아무 일도 일어나지 않는다.
- 늘어난 길이의 최솟값은 $c - bp(n+p)/(n^2-p^2) = c - bp/(n-p)$보다 작아질 수 없으며, 이 값은 정확히 $pb < (n-p)c$일 때 양수이다.
- 수치적으로, 임의의 m, λ, a, c, b, p에 대해 훅의 법칙을 그대로 쓴 방정식을 단계별(RK4) 적분으로 풀었더니 $x(t)$에 대한 식과 4×10^{-10} 이내로 일치했다. $n = 1$, $p = 1/\sqrt{2}$, $c = 1$이고 b가 $(n-p)c/p$보다 겨우 5% 클 때, $t = 20\,000$까지 가면 늘어난 길이가 실제로 음수(약 -0.05)가 된다.

흔한 실수

- x 자체를 늘어난 길이로 쓰는 것. 위쪽 끝점이 움직이므로 늘어난 길이는 $c + x - b\sin pt$이다.
- $\dot{x}(0) = 0$ 때문에 해에 $\sin nt$ 항이 반드시 들어가야 한다는 것을 잊는 것. 이 항이 없으면 입자는 속도 $n^2bp/(n^2-p^2)$로 출발하게 된다.
- 팽팽함의 조건을 $x \geq -c$로 쓰는 것. 이것은 A가 고정되어 있을 때에만 맞다.

STEP 너머

이것은 감쇠(damping)가 없는 강제 진동자이다. 응답은 구동 진동수 p와 고유 진동수 n이 섞인 것이며, $p \to n$일 때 인수 $1/(n^2-p^2)$이 발산하는데, 이것이 공명(resonance)이다. n/p가 무리수이면 2π를 법으로 한 (nt, pt)의 값들이 조밀하게 채워지므로, $n\sin nt - p\sin pt$는 $n+p$에 얼마든지 가까워진다. 그러면 충분조건 $pb < (n-p)c$는 사실상 필요조건이기도 하다(등호는 여전히 허용된다). 강제 진동, 공명, 감쇠는 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)에서 자세히 다루고, 미분방정식 측면은 Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에서 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.