풀이

STEP II 1991, 문제 11

역학 • 발사점으로부터 포물체까지의 거리

> **STEP II 1991, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q11

핵심 아이디어

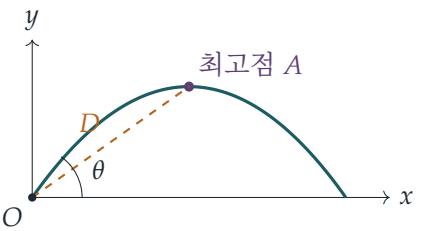
포탄과 포 사이 거리의 제곱을 다룬다. 이렇게 하면 제곱근을 피할 수 있고, 두 부분 모두 다항식 문제가 된다. 첫 번째 부분에서는 최고점까지 거리의 제곱이 $\sin^2\theta$에 대한 이차식이므로, 완전제곱식(completing the square)으로 고치거나 미분하여 가장 좋은 각을 찾는다. 두 번째 부분에서는 거리의 제곱이 감소할 때 정확히 포탄이 가까워지므로, 비행 전체에 걸쳐 그 시간 도함수(derivative)의 부호를 살펴본다.

풀이

모형

포탄을 공기 저항 없이 중력만 받으며 자유롭게 움직이는 질점(particle)으로 보고, 원점 O(포수들이 서 있는 곳)에서 속력 u, 발사각(elevation) θ로 발사한다고 하자. 여기서 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이다. x축은 수평 방향, y축은 연직 위 방향으로 잡는다. 시각 t에서

$$x = ut\cos\theta, \qquad y = ut\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$



발사각

최고점에 도달하는 것은 $\dot{y} = u\sin\theta - gt = 0$일 때, 곧 $t = u\sin\theta/g$일 때이다. 이때

$$x_A = \frac{u^2\sin\theta\cos\theta}{g}, \qquad y_A = \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}.$$

거리 OA를 D라 하고 $s = \sin^2\theta$로 놓으면 $\cos^2\theta = 1 - s$이다. 그러면

$$\begin{aligned} D^2 = x_A^2 + y_A^2 &= \frac{u^4}{g^2}\left(\sin^2\theta\cos^2\theta + \tfrac{1}{4}\sin^4\theta\right) \\ &= \frac{u^4}{g^2}\left(s(1-s) + \tfrac{1}{4}s^2\right) = \frac{u^4}{g^2}\left(s - \tfrac{3}{4}s^2\right). \end{aligned}$$

피해는 거리가 멀수록 줄어들므로 포수들은 D를 가능한 한 크게 하려 하고, 이는 D^2를 가능한 한 크게 하는 것과 같다. 완전제곱식으로 고치면

$$s - \tfrac{3}{4}s^2 = \tfrac{1}{3} - \tfrac{3}{4}\left(s - \tfrac{2}{3}\right)^2,$$

이고, 이 값은 정확히 $s = \frac{2}{3}$일 때 최댓값 $\frac{1}{3}$을 가진다. $s = \sin^2\theta$는 $(0, 1)$의 모든 값을 가지므로 이 값은 가능하다. 따라서 $\sin^2\theta = \frac{2}{3}$, $\cos^2\theta = \frac{1}{3}$이고,

$$\boxed{\tan\theta = \sqrt{2}, \qquad \theta = \arctan\sqrt{2} \approx 54.7^\circ}$$

이며, 이때 최고점과 포 사이의 거리는 $D = \dfrac{u^2}{\sqrt{3}\,g}$이다.

포탄은 내려오는 동안 더 가까워지는가?

$r^2 = x^2 + y^2$을 시각 t에서 포까지 거리의 제곱이라 하자. 포탄은 r^2이 감소할 때 정확히 가까워지므로, 다음 식의 부호를 알아야 한다.

$$\tfrac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2) = x\dot{x} + y\dot{y}.$$

생각해 보기 그냥 최고점에서의 거리와 그 뒤 몇몇 점에서의 거리를 비교하면 안 되는 이유는 무엇일까?

몇 개의 점만으로는 그 사이에서 거리가 잠깐 줄어드는 경우를 배제할 수 없다. 도함수는 비행의 모든 순간에 대한 정보를 한꺼번에 알려 준다. $\dot{x} = u\cos\theta$, $\dot{y} = u\sin\theta - gt$이므로

$$\begin{aligned} x\dot{x} + y\dot{y} &= u^2 t\cos^2\theta + \left(ut\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2\right)(u\sin\theta - gt) \\ &= u^2 t - \tfrac{3}{2}ugt^2\sin\theta + \tfrac{1}{2}g^2t^3 \\ &= \tfrac{1}{2}t\left[(gt)^2 - 3u\sin\theta\,(gt) + 2u^2\right], \end{aligned}$$

이다. 여기서 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$을 이용하였다. $t > 0$일 때 부호는 괄호 안의 식, 곧 gt에 대한 이차식의 부호와 같다. 완전제곱식으로 고치면

$$(gt)^2 - 3u\sin\theta\,(gt) + 2u^2 = \left(gt - \tfrac{3}{2}u\sin\theta\right)^2 + u^2\left(2 - \tfrac{9}{4}\sin^2\theta\right).$$

선택한 각에서는 $\sin^2\theta = \frac{2}{3}$이므로 상수항은 $u^2\left(2 - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}u^2 > 0$이다. 따라서 괄호 안의 식은 모든 t에 대하여 항상 양수이고, r^2은 비행 내내 순증가(strictly increasing)한다.

따라서 답은 **아니다**: 포탄은 내려오는 내내 포수들로부터 꾸준히 멀어지며, 하강 경로에서 가장 가까운 점은 최고점 자체이다. 이로써 최고 높이에서의 폭발만 고려한 포수들의 지름길이 정당했음을 알 수 있다. 이 각에서는 최고점이 실제로 하강 경로에서 가장 가까운 점이며, 그 거리는 $u^2/(\sqrt{3}\,g)$이다.

검산

- $\theta = \frac{\pi}{4}$일 때 최고점은 $(u^2/2g,\ u^2/4g)$이므로 $D^2 = \frac{5}{16}u^4/g^2$이다. 이는 우리가 구한 최댓값 $\frac{1}{3}u^4/g^2$보다 조금 작으며, 마땅히 그래야 한다.
- 일반적인 계산에 따르면 포탄이 처음으로 가까워지는 것은 $\frac{9}{4}\sin^2\theta \geq 2$, 곧 $\sin\theta \geq \frac{2\sqrt{2}}{3}$일 때뿐이며, 이 각은 약 $70.5°$로 $54.7°$보다 넉넉히 크다. ($\theta \to \frac{\pi}{2}$인 극한도 이치에 맞는다. 똑바로 위로 쏜 포탄은 포를 향해 똑바로 다시 떨어진다.)
- 수치적으로 $u = g = 1$로 두고 θ에 대해 탐색하면 최고점까지의 최대 거리는 $\theta \approx 54.736°$에서 $0.57735 \approx 1/\sqrt{3}$이고, 그 각에서 궤적을 따라 조금씩 나아가 보면 O로부터의 거리가 한 번도 감소하지 않는다. $70.5° \pm 0.6°$에서는 단조에서 단조가 아닌 상태로 바뀐다.

흔한 실수

- 최고점과 포 사이의 직선거리 대신 최고점의 수평 거리나 높이를 최대화하는 것.
- 포탄이 수평 방향으로 계속 멀어지므로 최고점 이후 포로부터의 거리가 당연히 증가한다고 가정하는 것. 포탄은 동시에 떨어지고 있으며, 충분히 가파르게 쏘면 실제로 다시 가까워진다.

STEP 너머

r 대신 r^2을 미분하여 $\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}$의 부호를 읽어 내는 요령은 움직이는 점이 다가오는지 멀어지는지를 판단하는 표준적인 방법이며, 벡터 역학과 궤도 연구 전반에 걸쳐 등장한다. 문턱각 $\arcsin(2\sqrt{2}/3)$은 고전적인 결과이다. 이보다 작은 각에서는 포물체(projectile)와 발사 지

점 사이의 거리가 항상 증가한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이런 논증을 자연스럽게 만들어 주는 운동에 대한 벡터적 접근을 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.