풀이

STEP II 1991, 문제 10

순수수학 • 공간에서의 직선과 평면

STEP II 1991, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/91-s2-q10

핵심 아이디어

데이터베이스 태그와는 달리, 이 문제는 3차원 공간의 직선(line)과 평면(plane)에 관한 문제이다. 그림자의 끝은 막대의 꼭대기를 스치고 지나가는 햇빛 광선이 지면과 만나는 점이다. 따라서 광선을 태양과 막대 꼭대기를 지나는 직선으로 나타내고, 지면을 막대의 밑동을 지나면서 막대에 수직인 평면으로 나타낸 다음, 둘의 교점을 구한다. 모든 위치를 막대 방향의 단위벡터(unit vector)로 나타내기만 하면 나머지는 모두 쉽다.

풀이

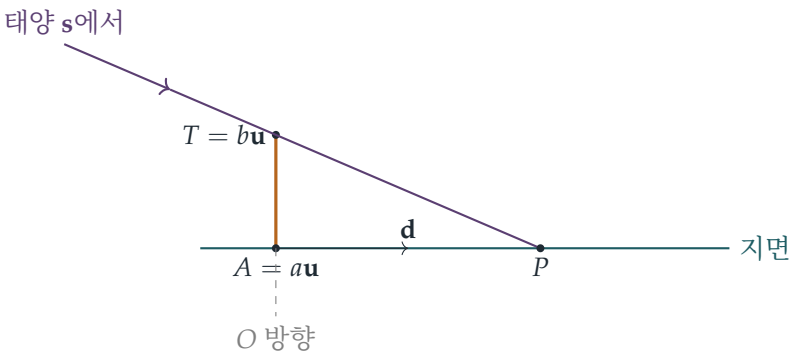
O를 지구의 중심이라 하고,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{s} = R\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

로 놓는다. 그러면 $\mathbf{u}$는 막대 방향의 단위벡터이고, 밑동은 $A = a\mathbf{u}$, 꼭대기는 $T = b\mathbf{u}$이며, 태양은 $\mathbf{s}$에 있다. 필요한 내적(dot product)은 단 하나로,

$$\mathbf{s}\cdot\mathbf{u} = R\sin\theta\cos\phi.$$

이다. 간단히 $c = R\cos\phi\sin\theta$라 쓴다.



꼭대기를 지나는 광선

그림자의 끝 P에 닿는 빛은 막 막대의 꼭대기를 지나온 빛이다. 따라서 P는 $\mathbf{s}$와 $b\mathbf{u}$를 지나는 직선 위에 있다. 즉 어떤 실수 t에 대하여

$$\mathbf{p} = \mathbf{s} + t\,(b\mathbf{u} - \mathbf{s}) = (1-t)\,\mathbf{s} + tb\,\mathbf{u}$$

이다.

지면

지면은 수평, 즉 막대에 수직이고 밑동 $a\mathbf{u}$를 지난다. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = 1$이므로 지면은 평면 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{u} = a$이다.

교점 구하기

직선의 식을 평면의 식에 대입하고 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = 1$과 $\mathbf{s}\cdot\mathbf{u} = c$를 이용하면

$$(1-t)c + tb = a \qquad \Longrightarrow \qquad t = \frac{c-a}{c-b}.$$

이다. 태양이 막대를 비추고 있으므로 $c-b$로 나눌 수 있다. 꼭대기에서 태양이 지평선 위에 있다는 것은 태양이 그 점의 접평면(tangent plane) 바깥쪽에 있다는 것, 즉 $\mathbf{s}\cdot\mathbf{u} > b$와 같으므로 $c > b$이다.

> ? **생각해 보기** 이 P가 정말로 막대 너머의 지면 위에 있고, 태양 뒤쪽 어딘가에 있는 것이 아닌가?

$c > b > a$이므로 $c-a > c-b > 0$이고, 따라서 $t > 1$이다. $t = 0$인 점은 태양이고 $t = 1$인 점은 막대의 꼭대기이므로, $t > 1$은 꼭대기를 지나 태양에서 멀어지는 쪽에 있다. 당연히 그래야 한다.

t의 값으로부터

$$1-t=\frac{(c-b)-(c-a)}{c-b}=\frac{a-b}{c-b}=-\frac{h}{c-b},$$
$$tb-a=\frac{b(c-a)-a(c-b)}{c-b}=\frac{c(b-a)}{c-b}=\frac{ch}{c-b}.$$

이다. 따라서 밑동에서 그림자 끝까지의 변위(displacement)는

$$\begin{aligned}\mathbf{d}=\mathbf{p}-a\mathbf{u}&=(1-t)\,\mathbf{s}+(tb-a)\,\mathbf{u}\\&=\frac{h}{c-b}(c\,\mathbf{u}-\mathbf{s})\\&=\frac{Rh}{c-b}\left[\cos\phi\sin\theta\begin{pmatrix}0\\\cos\phi\\\sin\phi\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\\0\end{pmatrix}\right]\\&=\frac{Rh}{c-b}\begin{pmatrix}-\cos\theta\\-(1-\cos^2\phi)\sin\theta\\\cos\phi\sin\phi\sin\theta\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

이다. $1-\cos^2\phi=\sin^2\phi$이고 $c-b=R\cos\phi\sin\theta-b$이므로, 이것은

$$\mathbf{d}=Rh\,(R\cos\phi\sin\theta-b)^{-1}\begin{pmatrix}-\cos\theta\\-\sin^2\phi\sin\theta\\\cos\phi\sin\phi\sin\theta\end{pmatrix},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

가운데 줄의 $\mathbf{d}=\frac{h}{c-b}(c\,\mathbf{u}-\mathbf{s})$는 눈여겨볼 만하다. 벡터 $c\,\mathbf{u}$는 $\mathbf{s}$의 막대 방향 성분(component)이므로, $c\,\mathbf{u}-\mathbf{s}$는 태양의 위치벡터의 수평 부분에 마이너스를 붙인 것이다. 경험으로 알듯이, 그림자는 태양의 수평 방향과 정반대 쪽을 향한다.

검산

- $\mathbf{d}\cdot\mathbf{u}=\frac{Rh}{c-b}\left(-\sin^2\phi\sin\theta\cos\phi+\cos\phi\sin^2\phi\sin\theta\right)=0$이므로 그림자는 지면 위에 놓인다.
- $\phi=0$으로 놓으면 막대는 y축 방향을 향한다. 이때 $\mathbf{d}=\frac{Rh}{R\sin\theta-b}(-\cos\theta,0,0)$이다. $\theta=\frac{\pi}{2}$이면 태양이 바로 머리 위에 있고 그림자는 사라진다. R가 매우 크면 그림자의 길이는 $h\cot\theta$에 가까워진다. 이것은 고도 θ에 있는 태양에 대한, 평평한 지구에서의 익숙한 답이다.
- 수치적으로, 태양이 지평선 위에 있도록 R,a,h,θ,ϕ를 무작위로 수천 번 골라 광선과 지면 평면의 교점을 직접 구하여 그림자 끝의 위치를 찾았다. 결과는 언제나 공식과 일치했으며, 가장 큰 상대오차(relative error)는 약 10^{-13}이었다.

흔한 실수

- 지면을 평면 $y = a\cos\phi$나 다른 좌표평면으로 잡는 것. "수평"이란 $\mathbf{u}$에 수직이라는 뜻이며, 그 평면은 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{u} = a$이다.
- 처음부터 모든 것을 성분으로 전개하는 것. 마지막 줄까지 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{s}$를 벡터로 유지하면 계산이 훨씬 줄어든다.

STEP 너머

여기서 햇빛은 한 점, 곧 태양을 지나는 직선들의 모임이므로, 그림자는 막대를 지면 평면에 **중심사영**(*central projection*)한 것이다. 태양이 아주 멀리 있으면 광선들이 거의 평행해지고, 사영은 평행사영(parallel projection)이 된다. 이것이 선형대수학(linear algebra)이 연구하는 종류의 사상이며, 벡터 $c\,\mathbf{u} - \mathbf{s}$는 $\mathbf{s}$를 막대 위로 사영(projection)한 것에서 $\mathbf{s}$ 자신을 뺀 것이다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 직선과 평면 위로의 사영을 자세히 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.