풀이

STEP II 1991, 문제 1

순수수학 • 이차식과 판별식

> **STEP II 1991, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q1

핵심 아이디어

이차식(quadratic)이 완전제곱식(perfect square)의 상수배가 되는 것은 정확히 중근(repeated root)을 가질 때, 즉 판별식(discriminant)이 0일 때이다. 이후의 모든 소문항은 계수가 λ에 의존하는 이차식에 이 하나의 조건을 적용한 것이다. 판별식을 0으로 만드는 λ를 구하면 λ에 대한 이차방정식이 나오고, 분해는 f와 g에 대한 두 일차방정식을 풀어서 얻는다.

풀이

$(*)$ 꼴이 될 조건

전개하면

$$a(x+k)^2 = ax^2 + 2akx + ak^2.$$

$\mathrm{h}(x)$가 이 꼴이면 계수를 비교(comparing coefficients)하여 $b = 2ak$, $c = ak^2$이므로

$$b^2 = 4a^2k^2 = 4a \cdot ak^2 = 4ac.$$

역으로 $b^2 = 4ac$이면 $k = \dfrac{b}{2a}$로 잡는다($a \neq 0$이므로 가능하다). 그러면 $2ak = b$이고 $ak^2 = \dfrac{b^2}{4a} = c$이므로 $\mathrm{h}(x) = a(x+k)^2$이다. 따라서 구하는 조건은

$$b^2 = 4ac,$$

이고, 이는 판별식이 0이라는 뜻이다.

λ의 두 값

다음이 성립한다.

$$f(x) + \lambda g(x) = (3+\lambda)x^2 + 4x - 2\lambda.$$

$\lambda = -3$이면 이 식은 $4x+6$이다. 이는 x^2의 계수가 0이 아니어야 하는 $(*)$ 꼴이 아니다. 따라서 $3+\lambda \neq 0$이고, 위의 조건에 의해 다음이 필요하다.

$$16 = 4(3+\lambda)(-2\lambda) \iff \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \iff (\lambda+1)(\lambda+2) = 0.$$

그러므로 $\lambda = -1$ 또는 $\lambda = -2$이고, 어느 것도 -3이 아니다. 구체적으로 쓰면

$$f(x) - g(x) = 2x^2 + 4x + 2 = 2(x+1)^2,$$
$$f(x) - 2g(x) = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2.$$

분해

> **생각해 보기** $f-g$와 $f-2g$에 대한 두 사실로부터 어떻게 f와 g를 각각 알아낼 수 있을까?

위에 나타낸 두 항등식을 미지수 $f(x)$와 $g(x)$에 대한 연립일차방정식(simultaneous linear equations)으로 본다. 첫 번째 식에서 두 번째 식을 빼면

$$g(x) = 2(x+1)^2 - (x+2)^2,$$

이고, 그러면 $f(x) = (f(x) - 2g(x)) + 2g(x) = (x+2)^2 + 4(x+1)^2 - 2(x+2)^2$, 즉

$$f(x) = 4(x+1)^2 - (x+2)^2.$$

전개하여 확인하면 $4(x^2+2x+1) - (x^2+4x+4) = 3x^2+4x$이고 $2(x^2+2x+1) - (x^2+4x+4) = x^2 - 2$이다. 따라서 한 가지 선택은 다음과 같다.

$$A = 4, \quad B = -1, \quad C = 2, \quad D = -1, \quad m = 1, \quad n = 2.$$

m과 n의 역할을 바꾸면 동등한 답 $m=2, n=1, A=-1, B=4, C=-1, D=2$를 얻는다.

마지막 소문항

이제

$$f(x) + \lambda g(x) = (3+\lambda)x^2 + 4x + \lambda\alpha.$$

앞에서와 마찬가지로 $\lambda = -3$이면 일차식 $4x - 3\alpha$가 되고, 이는 결코 $(*)$ 꼴이 아니다. $\lambda \neq -3$일 때 조건 $b^2 = 4ac$는 다음과 같이 된다.

$$16 = 4(3+\lambda)\lambda\alpha \iff \alpha\lambda^2 + 3\alpha\lambda - 4 = 0. \qquad (\dagger)$$

$\lambda \neq -3$이면서 (†)를 만족하는 λ의 값이 정확히 하나이기를 원한다.

? **생각해 보기** (†)가 두 근을 가지고, 그중 하나가 금지된 값 $\lambda = -3$일 수 있을까?

그렇지 않다. (†)의 좌변에 $\lambda = -3$을 대입하면 $9\alpha - 9\alpha - 4 = -4 \neq 0$이므로 $\lambda = -3$은 결코 근이 아니다. 따라서 조건을 만족하는 λ의 값은 정확히 (†)의 근들이다.

- $\alpha = 0$이면 (†)는 $-4 = 0$이 되어 해가 없다. 따라서 $\alpha \neq 0$이다.
- $\alpha \neq 0$이면 (†)는 λ에 대한 진짜 이차방정식이다. 이 방정식이 정확히 하나의 근을 가지는 것은 판별식이 0일 때이고, 그때에 한한다.

  $$9\alpha^2 + 16\alpha = 0 \iff \alpha(9\alpha + 16) = 0 \iff \alpha = -\tfrac{16}{9},$$

  여기서 $\alpha \neq 0$을 사용하였다.

그러므로

$$\alpha = -\frac{16}{9}.$$

중근은 $\lambda = -\frac{3\alpha}{2\alpha} = -\frac{3}{2}$이고, 실제로

$$f(x) - \tfrac{3}{2}\left(x^2 - \tfrac{16}{9}\right) = \tfrac{3}{2}x^2 + 4x + \tfrac{8}{3} = \tfrac{3}{2}\left(x + \tfrac{4}{3}\right)^2.$$

검산

분해한 식을 시험값에서 계산해 본다. $x = 1$에서 $4(2)^2 - (3)^2 = 7 = f(1)$이고 $2(2)^2 - 3^2 = -1 = g(1)$이다. 마지막 소문항에서 $\frac{3}{2}(x + \frac{4}{3})^2$의 $x = 0$에서의 값은 $\frac{3}{2} \cdot \frac{16}{9} = \frac{8}{3}$이며, 이는 $\lambda\alpha = (-\frac{3}{2})(-\frac{16}{9})$와 일치한다. $|p| \leq 60$, $q \leq 12$인 모든 유리수 $\lambda = p/q$를 컴퓨터로 시험해 보면, 가운데 소문항에서는 정확히 $\lambda = -1, -2$만, $\alpha = -\frac{16}{9}$일 때는 $\lambda = -\frac{3}{2}$만 나온다.

흔한 실수

- (∗)에서 $a \neq 0$이라는 조건을 잊는 것. $\lambda = -3$에서는 식이 일차식이 되므로, 그 값이 왜 제외되는지 밝혀야 한다.
- 마지막 소문항에서 "(†)의 판별식이 0"이라는 데서 멈추고 $\alpha = 0$인 경우를 다루지 않는 것. 이때 (†)는 아예 이차방정식이 아니며 근이 없다.

STEP 너머

f와 g를 일차형식 두 개의 제곱의 결합으로 나타내는 것은 이차형식(quadratic form) 한 쌍의 동시 대각화(simultaneous diagonalisation)이다. $f + \lambda g$를 퇴화시키는 λ의 값들은

대응하는 대칭행렬(symmetric matrix)에 대하여 $\det(F + \lambda G) = 0$의 근들이며, 이는 "일반화된 고윳값(generalised eigenvalue)" 문제이다. 두 λ 값이 일치하는 마지막 소문항은 바로 이러한 대각화가 실패할 수 있는 경우이다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 이러한 관점에서 이차형식과 고윳값을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.