풀이

STEP I 1991, 문제 9

순수수학 • 부등식과 조화급수

STEP I 1991, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/91-s1-q9

핵심 아이디어

소문항 (i)에서 각 부등식(inequality)은 x를 두 k제곱근(kth root) 사이에 가둔다. 요령은 서로 모순되는 하한 하나와 상한 하나를 찾는 것이다. 계산기 없이 세제곱근과 다섯제곱근을 비교하려면 양변을 열다섯제곱하면 된다. 소문항 (ii)에서는 긴 합을 (항의 개수) $\times$ (가장 작은 항)으로 아래에서 어림한다. 그다음 이런 꼴의 서로 겹치지 않는 묶음들을 이어 붙여 조화급수(harmonic series)를 원하는 만큼 크게 만든다.

풀이

소문항 (i)

$x > 1$이므로 x의 모든 거듭제곱은 양수이고, 양수 사이의 부등식은 양변을 양의 지수로 거듭제곱해도 방향이 유지된다. 이 사실을 풀이 내내 사용한다.

모순을 이끌어 내기 위해(귀류법, proof by contradiction) $n \geq 5$라고 가정하자. 그러면 특히 세 번째와 다섯 번째 부등식이 성립한다.

$$x^3 > 3 \qquad \text{그리고} \qquad x^5 < 6.$$

첫 번째 식의 양변을 다섯제곱하고, 두 번째 식의 양변을 세제곱하면

$$x^{15} > 3^5 = 243 \qquad \text{그리고} \qquad x^{15} < 6^3 = 216.$$

이로부터 $243 < x^{15} < 216$이 되는데, 이는 불가능하다. 따라서 $n \geq 5$일 수 없고, 그러므로 $n \leq 4$이다.

생각해 보기 세 번째와 다섯 번째 부등식을 골라야 한다는 것을 어떻게 알 수 있을까?

각 부등식은 $k^{1/k} < x < (k+1)^{1/k}$를 뜻한다. 하한 $k^{1/k}$는 1, 1.41, 1.44, 1.41, 1.38, ...로 변하며 $k = 3$일 때 가장 크다. 상한 $(k+1)^{1/k}$는 감소하며, $3^{1/3} \approx 1.44$보다 처음으로 작아지는 것이 $6^{1/5} \approx 1.43$이다. 대략적인 암산으로 이 쌍을 짚어 내고, 열다섯제곱으로 이를 정확히 증명하는 것이다. ($n = 4$인 경우는 실제로 일어날 수 있다. 예를 들어 $x = 1.45$이면 $x^2 = 2.1025$, $x^3 \approx 3.05$, $x^4 \approx 4.42$이다.)

소문항 (ii)

$n \geq 2$라 하자. 합 $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$은 $n^2 - n$개의 항으로 이루어져 있고, 각 항은 마지막 항인 $\frac{1}{n^2}$ 이상이다. $n \geq 2$이므로 항이 $n^2 - n \geq 2$개 있고, 따라서 첫 항 $\frac{1}{n+1}$은 $\frac{1}{n^2}$보다 엄격히 크다. 그러므로

$$\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n^2} > (n^2 - n) \cdot \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}.$$

양변에 $\frac{1}{n}$을 더하면

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n^2} > 1,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

조화급수의 합이 10을 넘게 만들기 $m \geq 2$일 때 각 묶음 $\frac{1}{m} + \cdots + \frac{1}{m^2}$은 1보다 큰 값을 보탠다. 이런 묶음을 여러 개 쓰려면 묶음끼리 겹치지 않아야 하므로, 새 묶음은 직전 묶음이 끝난 바로 다음에서 시작한다. 다음과 같이 정의하자.

$$a_1 = 2, \qquad a_{k+1} = a_k^2 + 1,$$

그러면 $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_3 = 26$, $a_4 = 677, \ldots$이다. k번째 묶음은 $\frac{1}{a_k}$부터 $\frac{1}{a_k^2}$까지이고, 다음 묶음은 $\frac{1}{a_k^2+1} = \frac{1}{a_{k+1}}$에서 시작한다. 따라서 $k = 1, \ldots, 9$에 대한 묶음들은 서로 겹치지 않고 연달아 이어지며, 모두 합쳐 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{a_9^2}$을 빠짐없이 덮는다. 그러므로

$$\sum_{n=1}^{a_9^2} \frac{1}{n} = 1 + \sum_{k=1}^{9} \left(\frac{1}{a_k} + \cdots + \frac{1}{a_k^2} \right) > 1 + 9 = 10.$$

생각해 보기 a_9^2은 어마어마하게 큰 수이다. 대신 N을 명시적으로 제시할 수 있을까?

그렇다. a_k의 크기를 어림하면 된다. $a_k < 2^{2^k}$임을 보이자. $k = 1$일 때는 $2 < 4$이므로 성립한다. $a_k < 2^{2^k}$이면 $a_k \leq 2^{2^k} - 1$이므로

$$a_{k+1} = a_k^2 + 1 \leq (2^{2^k} - 1)^2 + 1 = 2^{2^{k+1}} - 2^{2^k+1} + 2 < 2^{2^{k+1}}.$$

따라서 수학적 귀납법(induction)에 의해 $a_9 < 2^{512}$이고 $a_9^2 < 2^{1024}$이다. 양수인 항을 더 더하면 합은 커지기만 하므로

$$N = 2^{1024} \quad \text{이면} \quad \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} > 10.$$

이보다 큰 N도 모두 조건을 만족한다.

다른 방법: 항들을 $\frac{1}{2^j+1} + \cdots + \frac{1}{2^{j+1}}$ 꼴의 묶음으로 나누면, 각 묶음은 모두 $\frac{1}{2^{j+1}}$ 이상인 2^j개의 항으로 이루어지므로 $j \geq 1$이면 $\frac{1}{2}$보다 크고 $j = 0$이면 $\frac{1}{2}$과 같다. 따라서 $\sum_{n=1}^{2^{18}} \frac{1}{n} > 1 + \frac{18}{2} = 10$이고, $N = 2^{18} = 262\,144$는 훨씬 작은 답이 된다.

검산

- 소문항 (i): 수치로 확인하면 $n = 4$일 때 부등식들이 허용하는 범위는 $x \in (3^{1/3}, 5^{1/4}) \approx (1.442, 1.495)$이다. 다섯 번째 부등식을 더하면 $x < 6^{1/5} \approx 1.431$이어야 하므로 남는 값이 없다.
- 소문항 (ii): 정확한 분수로 계산하면 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} > 1$이고, 2부터 39까지의 모든 n에 대해 묶음의 합이 1을 넘는다.
- 조화급수의 합은 $N = 12\,367$에서 처음으로 10을 넘으므로, 올바른 답은 모두 이 값 이상이어야 한다. 2^{18}(이때 합은 약 13.05)과 2^{1024}은 모두 이보다 넉넉히 크다.

흔한 실수

- 양변이 양수라는 점(여기서는 $x > 1$이 보장한다)을 언급하지 않고 부등식을 거듭제곱하는 것.
- 끝점을 공유하는 묶음 $[2, 4]$, $[4, 16]$, $[16, 256]$, ...을 사용해 일부 항을 두 번 세는 것.
- 소문항 (ii)에서 적어도 한 항이 $\frac{1}{n^2}$보다 엄격히 크다는 것을 확인하지 않고 $>$ 대신 $\geq$를 쓰는 것.

STEP 너머

소문항 (ii)는 코시(Cauchy) 응집(condensation) 아이디어의 한 형태이다. 이는 조화급수가 발산(diverge)함을 증명하는데, 그 속도는 놀라울 만큼 느리다. 조화급수의 부분합(partial sum)은 $\ln N + \gamma$처럼 증가하며, 여기서 $\gamma \approx 0.5772$는 오일러-마스케로니 상수(Euler–Mascheroni constant)이다. 합을 적분과 비교하면 이 증가 속도를 얻을 수 있고, 가장 작은 N도 쉽게 어림할 수 있다($e^{10-\gamma} \approx 12\,367$). Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해하기)는 응집과 급수의 수렴(convergence)을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.