풀이

STEP I 1991, 문제 8

순수수학 • 치환적분

> **STEP I 1991, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q8

핵심 아이디어

치환(substitution) $y = \pi - x$는 $[0, \pi]$를 자기 자신으로 보내고 $\sin x$를 바꾸지 않지만, 다루기 까다로운 인수 x를 $\pi - y$로 바꾸어 놓는다. 적분을 그 대칭(reflected) 복사본과 더하면 x가 완전히 사라진다. (ii)에서는 피적분함수(integrand)가 어떤 함수와 그 도함수(derivative)로 이루어져 있으므로, 잘 고른 치환 하나가 모든 일을 해 준다.

풀이

소문항 (i)

$I = \int_0^\pi x\,\mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x$라 하자. $[0, \pi]$의 양 끝을 서로 바꾸면서 $\sin x$는 그대로 두는 치환이 필요하므로 $k = \pi$로 잡는다. 즉 $x = \pi - y$로 놓으면 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}y$, $\sin x = \sin(\pi - y) = \sin y$이고, $x = 0, \pi$는 각각 $y = \pi, 0$에 대응한다. 그러면

$$\begin{aligned} I &= \int_\pi^0 (\pi - y)\,\mathrm{f}(\sin y)\,(-\mathrm{d}y) = \int_0^\pi (\pi - y)\,\mathrm{f}(\sin y)\,\mathrm{d}y \\ &= \pi \int_0^\pi \mathrm{f}(\sin y)\,\mathrm{d}y - I, \end{aligned}$$

이다. 여기서 y는 적분변수(dummy variable)일 뿐이므로 마지막 적분은 다시 I이다. 따라서

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x.$$

? **생각해 보기** $\frac{\pi}{2}\int_0^\pi$에서 $\pi\int_0^{\pi/2}$로는 어떻게 넘어가는가?

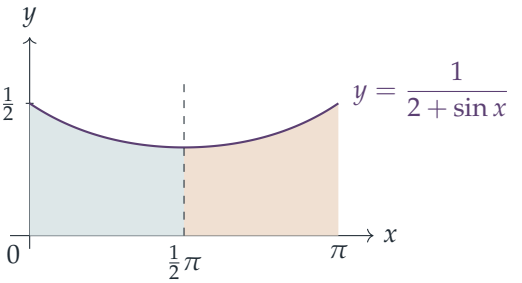
$\sin(\pi - x) = \sin x$이므로 $[0, \pi]$에서 $\mathrm{f}(\sin x)$의 그래프는 $x = \frac{1}{2}\pi$에 대하여 대칭이다. 이를 엄밀하게 보이기 위해 적분을 $\frac{1}{2}\pi$에서 나누고, 뒤쪽 절반에 같은 치환 $x = \pi - y$를 쓴다.

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_{\pi/2}^{0} \mathrm{f}(\sin y)\,(-\mathrm{d}y) = \int_{0}^{\pi/2} \mathrm{f}(\sin y)\,\mathrm{d}y.$$

그러므로 $\int_0^{\pi} \mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2} \mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x$이고, 따라서

$$\int_0^{\pi} x\,\mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x,$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다.



이제 $u \in [-1, 1]$에서 연속(continuous)인 $\mathrm{f}(u) = \dfrac{1}{2+u}$를 택하자. 그러면

$$\int_0^{\pi} \frac{x}{2+\sin x}\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x}.$$

남은 적분에는 $t = \tan\frac{1}{2}x$를 쓴다. 그러면

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2},$$

이고, $x = 0, \frac{1}{2}\pi$는 각각 $t = 0, 1$에 대응한다. 따라서

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x} &= \int_0^1 \frac{1}{2+\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}t}{2(1+t^2)+2t} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1} \\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\tan^{-1}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\tan^{-1}\sqrt{3} - \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

그러므로

$$\int_0^{\pi} \frac{x}{2+\sin x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\,\pi^2}{9}.$$

소문항 (ii)

? 생각해 보기 $(\sin^{-1} t)^2$의 도함수는 무엇인가?

연쇄법칙(chain rule)에 의하여

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sin^{-1} t)^2 = \frac{2\sin^{-1} t}{\sqrt{1-t^2}},$$

이고, 이것은 코사인에 곱해진 인수의 정확히 (2배)이다. 그러므로 $u = (\sin^{-1} t)^2$으로 치환하면 $\mathrm{d}u = \dfrac{2\sin^{-1} t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$이다. $t = 0$일 때 $u = 0$이고, $t = 1$일 때 $\sin^{-1} 1 = \frac{1}{2}\pi$이므로 $u = \frac{1}{4}\pi^2$이다. 따라서

$$\int_0^1 \frac{(\sin^{-1} t)\cos[(\sin^{-1} t)^2]}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi^2/4} \cos u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi^2}{4}.$$

피적분함수가 $t = 1$에서 무한히 커지므로, 엄밀히 말하면 이것은 이상적분(improper integral)이다. 치환을 쓰면 이 문제가 깔끔하게 해결된다. $\theta = \sin^{-1} t$로 나타내면 적분은 $\int_0^{\pi/2} \theta\cos\theta^2\,\mathrm{d}\theta$가 되고, 그 피적분함수는 연속이므로 적분은 수렴(converge)하며 위의 값이 옳다. (먼저 $\theta = \sin^{-1} t$, 다음에 $u = \theta^2$으로 두 단계에 걸쳐 치환하는 것도 충분히 좋은 다른 방법이다.)

답 $\frac{1}{2}\sin\frac{1}{4}\pi^2$은 정확한 값이며 더 이상 간단해지지 않는다. $\frac{1}{4}\pi^2$은 "좋은" 각이 아니며, 아마 이 때문에 출제자들이 계산기에 손을 뻗지 말라고 경고했을 것이다.

검산

- 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 $\int_0^{\pi} x/(2+\sin x)\,\mathrm{d}x \approx 1.899406$이고, $\pi^2/(3\sqrt{3}) \approx 1.899406$이다.
- 간단한 타당성 확인: $\frac{1}{3} \le \frac{1}{2+\sin x} \le \frac{1}{2}$이므로 적분값은 $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\pi^2 \approx 1.64$와 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\pi^2 \approx 2.47$ 사이에 있다.
- (i)의 항등식은 $\mathrm{f}(u) = 1$로 확인할 수 있다. 양변이 모두 $\frac{1}{2}\pi^2$이다.
- (ii)에서 $\frac{1}{2}\sin(\frac{1}{4}\pi^2) \approx 0.312133$이며, 이는 $\int_0^{\pi/2} \theta\cos\theta^2\,\mathrm{d}\theta$를 수치적으로 계산한 값과 일치한다.

흔한 실수

- 적분 구간을 절반으로 줄이는 것을 정당화하지 않고 $I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x$에서 멈추는 것.
- $t = \tan\frac{1}{2}x$로 치환할 때 적분 구간을 바꾸는 것을 잊는 것 (위끝은 ∞가 아니라 1이 된다).

► (ii)에서 인수 $\frac{1}{2}$을 빠뜨리는 것. $\mathrm{d}u$에는 2가 붙어 있다.

STEP 너머

(i)의 기법, 즉 구간의 대칭성을 이용하여 원시함수(antiderivative)를 전혀 구하지 않고 $\int x\,g(x)\,\mathrm{d}x$의 값을 구하는 방법은 큰 주제의 작은 예이다. 대칭성은 계산보다 훨씬 적은 수고로 적분값을 알려 주는 경우가 많다. (ii)는 이상적분의 이론과 맞닿아 있는데, 이 이론에서는 변수변환을 통해 유계가 아닌 피적분함수를 연속인 함수로 바꿀 수 있다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 변수변환 정리(change-of-variables theorem)를 엄밀하게 다루며, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(STEP 대비 문제집)에는 이런 유형의 적분이 훨씬 더 많이 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.