풀이

STEP I 1991, 문제 7

순수수학 • 변수분리형 미분방정식

> **STEP I 1991, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q7

핵심 아이디어

두 변화율 모두 $(1+V/V_0)^2$의 상수배이므로, 자연스러운 변수는 $u = 1 + V/V_0$이며, 이 변수는 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \pm c\,u^2$를 만족한다. 변수분리(separation of variables)를 하면 **역수**(reciprocal) $w = 1/u$가 단순히 선형으로 변한다는 것을 알 수 있다. 성장하는 해에는 비율 a로 감소하고, 쇠퇴하는 해에는 비율 b로 증가한다. 그러면 모든 것은 직선 그래프 하나를 추적하면서 두 가지 질문을 던지는 문제로 귀결된다. w가 0에 도달하는가(돈이 무한대가 된다), 아니면 1에 도달하는가(국고(Treasury)가 빈다)?

풀이

식 세우기

t를 년 단위로 재고 $V = kV_0$로 쓰면, $u = 1 + k$이고 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t = V_0\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$이다. 성장하는 해에는

$$V_0\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = aV_0u^2 \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = a \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{u}\right) = -a,$$

이고, 같은 방법으로 쇠퇴하는 해에는($V > 0$인 동안) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{u}\right) = +b$이다. 따라서

$$w = \frac{1}{1+V/V_0},$$

로 두면, w는 성장기에는 비율 a로 선형 감소하고 쇠퇴기에는 비율 b로 선형 증가한다. $V \geq 0$은 $0 < w \leq 1$에 대응한다는 점에 유의하라. 국고는 정확히 $w = 1$일 때 비고, $V \to \infty$는 정확히 $w \to 0^+$일 때 일어난다.

부등식의 의미

처음에는 $w = w_0 = \frac{1}{1+k_0}$이고, 첫해 동안 $w = w_0 - at$이다. 그러면 다음이 성립한다.

- $k_0 \geq 0$은 단지 국고가 음의 금액을 가질 수 없다는 뜻이다.
- 첫해 내내 돈이 유한하게 유지되는 것은 정확히 w가 $t = 1$까지 양수로 유지될 때, 즉 $w_0 - a > 0$일 때이며, 이는 다음과 같다.

$$\frac{1}{1+k_0} > a \iff 1 + k_0 < \frac{1}{a} \iff k_0 < a^{-1} - 1.$$

  이 조건이 성립하지 않으면 V는 시각 $t = w_0/a \leq 1$, 즉 바로 첫해 안에 무한대가 되는데, 이는 실제 국고를 나타내는 어떤 모형으로서도 터무니없다.

두 부등식을 함께 쓰면 $a^{-1} - 1 > 0$, 즉 $a < 1$이어야 한다. 이 사실은 마지막에 사용한다.

두 번째 해 버티기

첫해가 지나면 $w_1 = \frac{1}{1+k_1}$이다(실제로 $w_1 = w_0 - a$이다). 쇠퇴하는 해 동안에는 $w < 1$인 한 $w = w_1 + bt$이다. 그 해가 끝날 때에도 국고가 비어 있지 않은 것은 정확히 $t = 1$까지 w가 1에 도달하지 않을 때이다.

$$\frac{1}{1+k_1} + b < 1 \iff b < \frac{k_1}{1+k_1}.$$

특히 $b < 1$이어야 하며, 그러면 이 식은 다음과 같이 정리된다.

$$k_1 > \frac{b}{1-b}.$$

반대로 $b \geq \frac{k_1}{1+k_1}$이면, 돈은 시각 $t = (1 - w_1)/b \leq 1$에 바닥나고 그 해의 남은 기간 내내 비어 있는 상태로 남는다.

세 번째 해의 무한한 증가

> **생각해 보기** 국고가 두 번째 해에 비어 버리면 어떻게 될까? 그래도 세 번째 해에 폭발(blow-up)할 수 있을까?

두 번째 해가 끝날 때 국고가 비어 있다면, 세 번째 해는 $w = 1$에서 시작하고 $w = 1 - at$인데, $a < 1$이므로 이 값은 그 해 내내 양수로 유지된다. 따라서 빈 국고는 세 번째 해에 폭발할 수 없으며, 돈이 두 번째 해를 버티는 경우만 생각하면 된다.

그 경우 $w_2 = w_1 + b = \frac{1}{1+k_0} - a + b$이고, 세 번째 해에는 $w = w_2 - at$이다. 세 번째 해 동안 돈이 무한해지는 것은 정확히 $t = 1$까지 w가 0에 도달할 때, 즉 $w_2 \leq a$일 때이다.

$$\frac{1}{1+k_0} - a + b \leq a \iff b \leq 2a - \frac{1}{1+k_0}.$$

이것이 "그러나 그 전에는 아님"이라는 조건과 모순되지 않는지 확인해야 한다.

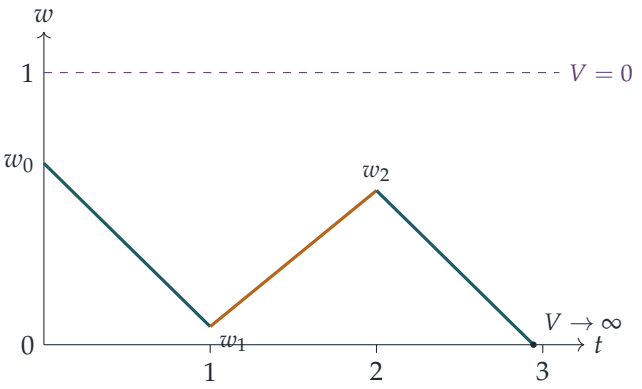
- 첫해에 폭발하지 않는다는 것은 $k_0 < a^{-1} - 1$이 보장하며, 돈이 감소하는 두 번째 해에는 폭발이 일어날 수 없다.
- 돈은 두 번째 해를 버틴다. $w_2 \le a$이면 $a < 1$이므로 $w_2 < 1$이고, 따라서 생존 조건 $w_2 < 1$은 자동으로 성립한다.

따라서 이 모형이 그 전이 아니라 세 번째 해에 무한한 증가를 예측하는 것은 정확히 다음 조건이 성립할 때이다.

$$b \le 2a - \frac{1}{1+k_0}.$$

등호가 없는 부등식이 성립하면 V는 세 번째 해에 들어선 뒤 시각 $t = w_2/a < 1$에 무한대가 되고, 등호인 경우에는 세 번째 해가 끝나는 바로 그 순간 $V \to \infty$이다. ($b > 0$이므로 이는 $2a > \frac{1}{1+k_0}$, 즉 $k_0 > \frac{1}{2a} - 1$일 때에만 일어날 수 있다.)

아래 그림은 조건이 성립하는 경우인 $a = 0.6$, $b = 0.5$, $k_0 = 0.5$에 대하여 t에 따른 w의 그래프를 보여 준다.



검산

위의 예에서 $k_1 = 14$이고 생존 조건 $14 > \frac{0.5}{0.5} = 1$이 성립한다. 그러면 $k_2 = \frac{13}{17} \approx 0.765$이고, 세 번째 해의 폭발은 $t = w_2/a \approx 0.944$에서 일어나는데, 이는 $2a - \frac{1}{1+k_0} - b = \frac{1}{30} > 0$과 일치한다. 또한 a, b, k_0를 무작위로 300번 골라 미분방정식(differential equation)을 수치적으로 적분하였다(4차 룽게-쿠타(Runge–Kutta) 방법). k_1과 k_2의 닫힌 형태는 약 10^{-11}까지 일치했고, 생존 판정 기준과 폭발 판정 기준 모두 모든 경우에 수치적 거동을 정확히 예측했다.

흔한 실수

- 두 번째 해에 국고가 빌 수 있다는 것을 잊는 것. 이 문제에서는 $a < 1$이므로 문제가 되지 않지만, 반드시 언급해야 한다.
- 폭발 조건을 거꾸로 생각하는 것. 폭발은 $1/(1+k)$가 0에 도달하는 것에 대응하며, k가 0에 도달하는 것이 아니다.
- $\frac{1}{1+k_1} + b < 1$을 k_1에 관한 조건으로 정리할 때 $b < 1$이라는 조건을 무시하는 것.

STEP 너머

방정식 $\dot{u} = au^2$는 **유한 시간 폭발**(finite-time blow-up)의 표준적인 예이다. 지수적 증가와 달리 해가 유한한 시각에 무한대가 될 수 있으므로, 미분방정식의 해가 모든 시간에 대해 존재한다는 보장은 없다. 상미분방정식(ODE)의 첫 강좌에서 해의 국소 존재성(local existence)과 대역 존재성(global existence)의 구분이 등장하는 곳이 바로 여기이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 비선형 1계 방정식을 다룰 때 이 내용을 논의한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.