풀이

STEP I 1991, 문제 6

순수수학 • 정류점과 이상적분

STEP I 1991, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/91-s1-q6

이 문제는 *Beyond STEP*의 3.1 절 **오류 찾기**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch03/spot-the-flaw.html

핵심 아이디어

아무것도 그대로 믿지 않는다. 모든 계산을 직접 다시 해 보고, "따라서"나 "그러므로"가 나올 때마다 그 단계가 정말로 성립하는지 묻는다. (i)에서는 도함수(derivative)가 잘못 계산되었고, 설령 정류점(stationary point)을 올바르게 구했더라도 극대, 극소, 그리고 전역적인 범위에 대한 추론에 결함이 있다. (ii)에서는 원시함수(antiderivative)가 틀렸고, 더 심각하게는 피적분함수(integrand)가 구간 안에서 발산하므로 미적분학의 기본정리(fundamental theorem of calculus)를 아예 적용할 수 없다.

풀이

소문항 (i)

1단계: 정류점. 몫의 미분법(quotient rule)에 의해

$$g'(x) = \frac{6x^2(x^4+4) - 4x^3(2x^3+3)}{(x^4+4)^2} = \frac{-2x^6 - 12x^3 + 24x^2}{(x^4+4)^2} = \frac{-2x^2\,(x^4+6x-12)}{(x^4+4)^2}.$$

따라서 $g'(x) = 0$인 것은 정확히 $x = 0$이거나 $h(x) = 0$일 때이다. 여기서 $h(x) = x^4 + 6x - 12$이다. 그런데 $h(1) = -5$이고 $h(-1) = -17$이므로 $x = \pm 1$은 정류점이 아니다. 실제로 $g'(1) = \frac{2}{5}$이고 $g'(-1) = \frac{34}{25}$이다. 주장은 첫 단계에서부터 틀렸다.

h의 근은 몇 개인가? $h'(x) = 4x^3 + 6$은 $x_0 = -(3/2)^{1/3}$에서만 0이 되므로, h는 감소하다가 증가한다. 따라서 h는 0을 많아야 두 번 지난다. 또한 $h(0) = -12 < 0$이고 $x \to \pm\infty$일

때 $h(x) \to +\infty$이므로 적어도 두 번 지난다. 그러므로 h는 정확히 두 개의 실근 $\beta < 0 < \alpha$를 가진다. $h(1) < 0 < h(2) = 16$이고 $h(-3) = 51 > 0 > h(-2) = -8$이므로

$$1 < \alpha < 2, \qquad -3 < \beta < -2,$$

이고, 수치적으로 $\alpha \approx 1.386$, $\beta \approx -2.247$이다.

2단계: 정류점에서의 함숫값. $g(0) = \frac{3}{4}$는 맞고 $g(1) = 1$도 맞지만, $g(-1) = \frac{1}{5}$이지 1이 아니다(게다가 ± 1의 두 점은 어차피 정류점이 아니다). h의 근 t에서는 $t^4 = 12 - 6t$이므로 $t^3 = (12 - 6t)/t$이고

$$g(t) = \frac{2(12-6t)/t + 3}{16 - 6t} = \frac{24 - 9t}{t(16-6t)} = \frac{3(8-3t)}{2t(8-3t)} = \frac{3}{2t},$$

이다. 여기서 $8 - 3t \neq 0$으로 약분하였다($t = \frac{8}{3}$은 h의 근이 아니기 때문이다). 따라서 정류점에서의 함숫값은 $g(0) = \frac{3}{4}$, $g(\alpha) = \frac{3}{2\alpha} \approx 1.083$, $g(\beta) = \frac{3}{2\beta} \approx -0.668$이다.

> **생각해 보기** 한 정류점에서의 함숫값이 다른 정류점에서의 함숫값보다 작다면, 작은 쪽이 반드시 극소인가?

3단계: 정류점의 성질. 그렇지 않다. 정류점에서의 **함숫값**을 비교하는 것만으로는 그 성질에 대해 아무것도 알 수 없다. 양쪽에서 g'의 부호를 살펴보거나 g''을 살펴보아야 한다. 인수분해된 꼴에서 $x^2 > 0$이고 $(x^4+4)^2 > 0$이므로, $x \neq 0$일 때 $g'(x)$의 부호는 $-h(x)$의 부호와 같다. (β, α)에서 $h < 0$이고 $[\beta, \alpha]$ 밖에서 $h > 0$이므로 다음이 성립한다.

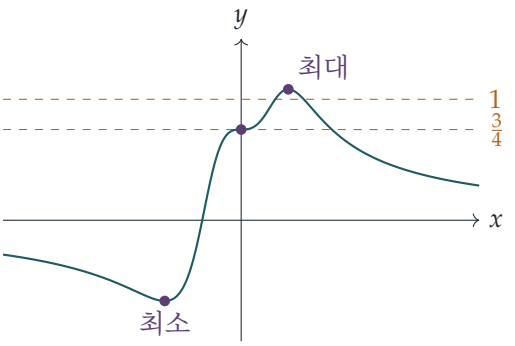
- g는 $x < \beta$에서 감소하고, (β, α)에서 증가하며, $x > \alpha$에서 감소한다.
- $x = \beta$는 극소이고 $x = \alpha$는 극대이다.
- $x = 0$에서는 양쪽 모두 $g' > 0$이므로, $x = 0$은 극소가 아니라 정류 변곡점(stationary point of inflection)이다.

4단계: 전역적인 범위. 극대와 극소를 올바르게 구했더라도, "모든 x에 대하여" 성립하는 범위를 말하려면 더 많은 것이 필요하다. 함수가 다른 곳, 예를 들어 $x \to \pm\infty$에서 극댓값보다 커질 수도 있기 때문이다. 여기서는 $x \to \pm\infty$일 때 $g(x) \to 0$이고(분모의 차수가 더 높다), $x^4 + 4 > 0$이므로 g는 모든 곳에서 연속이다. 이것을 3단계의 단조성과 함께 생각하면, g는 0 근처의 값에서 $g(\beta)$까지 내려갔다가 $g(\alpha)$까지 올라간 뒤 다시 0을 향해 내려간다. 그러므로 올바른 명제는

$$\frac{3}{2\beta} \le g(x) \le \frac{3}{2\alpha} \quad \text{모든} x, \qquad \text{즉 대략} -0.668 \le g(x) \le 1.083,$$

이며, 두 경계값 모두 실제로 달성된다.

판정. 결론 $\frac{3}{4} \le g(x) \le 1$은 양쪽 끝 모두에서 거짓이다. $g(-1) = \frac{1}{5} < \frac{3}{4}$이고(실제로 $2x^3 + 3 < 0$이면 언제나 $g(x) < 0$이다), $\alpha < \frac{3}{2}$이므로 $g(\alpha) > 1$이다(확인: $h(\frac{3}{2}) = \frac{81}{16} - 3 > 0$이므로 $\alpha < \frac{3}{2}$이고 $\frac{3}{2\alpha} > 1$이다).



소문항 (ii)

1단계: 부정적분. 주어진 답은 틀렸다. $-3(1-x)^{-4}$를 미분하면 $-12(1-x)^{-5}$가 되지 $(1-x)^{-3}$이 되지 않는다. 지수는 -3에서 -2로 하나 **올라가야** 한다.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-x)^{-2} = -2(1-x)^{-3}\cdot(-1) = 2(1-x)^{-3},$$

이므로 올바른 결과는

$$\int (1-x)^{-3}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}(1-x)^{-2} + c, \qquad x \neq 1.$$

이다.

> ? **생각해 보기** 올바른 원시함수로 계산해도 -1에서 3까지 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = 0$이 나온다. 그렇다면 결국 답은 0인가?

2단계: 정적분. 그렇지 않다. $[F(x)]_{-1}^{3}$을 계산하는 것은 구간 전체에서 $F' = f$이고 f가 그 구간에서 연속일 때에만 정당하다. 여기서 $(1-x)^{-3}$은 $[-1,3]$ 안에 있는 $x=1$에서 정의되지 않고 그 근처에서 유계가 아니므로, 이 적분은 이상적분(improper integral)이며 두 부분 각각의 극한으로 정의해야 한다.

$$\int_{-1}^{1-\varepsilon} (1-x)^{-3}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\left(\varepsilon^{-2} - \tfrac{1}{4}\right) \to +\infty \quad (\varepsilon \to 0^{+}),$$
$$\int_{1+\delta}^{3} (1-x)^{-3}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{4} - \delta^{-2}\right) \to -\infty \quad (\delta \to 0^{+}).$$

두 부분 모두 발산(diverge)하므로 이 적분은 존재하지 않는다. "$\infty - \infty$"에는 값이 없다. 이는 기하적으로도 납득이 된다. 피적분함수는 $x<1$에서 양수이고 $x>1$에서 음수이며, 각 쪽이 둘러싸는 넓이가 무한하다.

판정. 두 단계 모두 틀렸고, 결론도 그대로는 거짓이다. $\int_{-1}^{3}(1-x)^{-3}\,\mathrm{d}x$는 정의되지 않는다. "0"이 일말의 진실을 갖는 것은 **대칭적인 틈** $\varepsilon = \delta$를 잘라낼 때뿐이다. 그때는 두 부분이 정확히 상쇄되어 극한이 0이 된다(코시 주요값(Cauchy principal value)). 그러나 예를 들

어 $\delta = 2\varepsilon$으로 잡으면 합은 $\frac{1}{2}(\varepsilon^{-2} - \frac{1}{4}\varepsilon^{-2}) \to \infty$가 되므로, 답은 $x = 1$에 어떻게 다가가느냐에 따라 달라진다. 바로 이 때문에 이 적분은 정의되지 않는 것이다.

검산

g의 수치 미분은 임의의 점들에서 인수분해된 식과 일치하며, $g'(1) = 0.4 \neq 0$이다. 이분법(bisection)으로 $\alpha \approx 1.3856$, $\beta \approx -2.2467$을 얻고, $g(\alpha) = 1.0825 = 3/(2\alpha)$, $g(\beta) = -0.6676 = 3/(2\beta)$이다. $[-100, 100]$에서 g를 표본 추출해 보면 이 값들이 전역 최댓값과 최솟값임이 확인된다. (ii)의 경우, $[-1, 0.99]$에서 중점 수치적분을 하면 약 4999.87이 나와 $\frac{1}{2}(10^4 - \frac{1}{4})$와 일치하고, 대응하는 $[1.01, 3]$ 부분에서는 -4999.87이 나온다.

흔한 실수

- 정류점에서의 함숫값을 비교하여 정류점의 성질을 판단하는 것.
- 전역적인 범위를 주장하면서 $x \to \pm\infty$일 때의 행동을 잊는 것.
- 피적분함수가 무한대가 되는 점을 가로질러 $[F(x)]_a^b$를 적용하는 것. 항상 먼저 피적분함수가 $[a, b]$에서 연속인지 확인한다.

STEP 너머

소문항 (ii)는 이상적분에 관한 것이다. 특이점(singularity)을 포함하는 구간에서의 적분은 극한으로 정의되며, 한쪽 극한 각각이 따로 존재할 때에만 수렴(converge)한다. 대칭적인 극한인 코시 주요값은 복소해석학(complex analysis)과 물리학에서 정말로 유용한 개념이지만, 이것은 다른 대상이다. 소문항 (i)은 극값(local extremum)과 전역 최대·최소(global extremum) 사이의 간극에 관한 것으로, 해석학에서는 최대·최소 정리(extreme value theorem)를 통해 이를 엄밀하게 다룬다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)가 두 주제를 모두 꼼꼼히 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.