풀이

STEP I 1991, 문제 5

순수수학 • 정규 벡터 집합

> **STEP I 1991, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q5

핵심 아이디어

조건 (ii)는 벡터들의 합이 $\mathbf{0}$이라는 뜻이다. 벡터 방정식을 수에 관한 식으로 바꾸는 가장 간단한 방법은 양변에 벡터 하나를 내적(dot product)하는 것이다. 그 내적의 값은 조건 (i)이 알려 준다. 그다음부터 문제는 개수 세기로 바뀐다. 고정된 몇 개의 벡터와의 내적이 모두 정해진 벡터는 놓일 수 있는 위치가 매우 적다. 따라서 집합에 들어갈 수 있는 벡터도 몇 개뿐이다.

풀이

항등식 $(n-1)\beta = -\alpha^2$

(ii)에 의해 $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \cdots + \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$이다. 양변에 $\mathbf{a}_1$을 내적한다. (i)에 의해 항 $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1$은 α^2이고, 나머지 $n-1$개의 항 $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_j$ $(j \neq 1)$는 각각 β이다. 따라서

$$\alpha^2 + (n-1)\beta = 0, \qquad \text{즉,} \qquad (n-1)\beta = -\alpha^2,$$

이므로 원하는 식이 성립한다. 특히 $\beta = -\alpha^2/(n-1) < 0$이다.

2차원

이제 $\alpha^2 = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 = 1$이므로 모든 $\mathbf{a}_i$는 단위벡터(unit vector)이고,

$$\beta = -\frac{1}{n-1}.$$

이다. $i \geq 2$에 대하여 $\mathbf{a}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$라 하자. 조건 $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_i = \beta$는 $x_i = \beta$를 뜻하고, 그러면 $|\mathbf{a}_i| = 1$에서 $y_i = \pm\sqrt{1-\beta^2}$일 수밖에 없다. 따라서 $\mathbf{a}_1$이 아닌 모든 벡터는

$$\begin{pmatrix} \beta \\ \sqrt{1-\beta^2} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \beta \\ -\sqrt{1-\beta^2} \end{pmatrix}.$$

중 하나이다.

? **생각해 보기** 후보를 안다는 사실이 n을 어떻게 제한하는가?

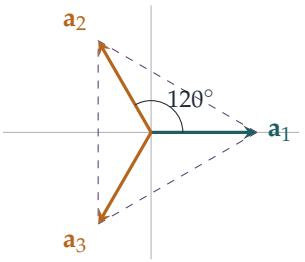
집합의 벡터들은 서로 다르므로(distinct) $\mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$은 $n-1$개의 **서로 다른** 후보이다. 후보는 많아야 두 개이므로 $n - 1 \leq 2$, 즉 $n \leq 3$이다. $n \geq 2$이므로 $n = 2$ 또는 $n = 3$이다.

$n = 2$. 이때 $\beta = -1$이므로 두 후보가 일치하고 $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$이다. 이것은 조건을 만족한다. $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = -1 = \beta$이고 $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = \mathbf{0}$이다.

$n = 3$. 이때 $\beta = -\frac{1}{2}$이고 $\sqrt{1-\beta^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$이며, $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$은 서로 다른 두 후보

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{와} \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

이어야 한다(순서는 상관없다). 확인해 보면 $\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} = \beta$이고, 세 벡터의 합은 $\mathbf{0}$이다. 세 벡터는 원점을 중심으로 하는 정삼각형(equilateral triangle)의 꼭짓점을 가리킨다.



(β를 결정하는 다른 방법도 있다. $n \geq 3$이면 $-1 < \beta < 0$이므로 두 후보는 실제로 서로 다르고, $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$은 두 후보 모두여야 한다. 그러면 $\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3 = \beta^2 - (1-\beta^2) = 2\beta^2 - 1$이고, 이것을 β와 같다고 놓으면 $(2\beta+1)(\beta-1) = 0$이다. 따라서 $\beta = -\frac{1}{2}$이고, 이 역시 $n = 3$을 뜻한다.)

3차원

이번에도 $\alpha = 1$이고 $\beta = -1/(n-1)$이다. $n = 2$인 경우는 앞과 같다. $\beta = -1$이고, $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = -1$을 만족하는 단위벡터는 $\mathbf{a}_2 = -\mathbf{a}_1 = (-1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$뿐이며, 이 벡터는 x-y 평면 위

에 있다. 따라서 $\{\mathbf{a}_1, -\mathbf{a}_1\}$이 답 하나이다.

이제 $n \geq 3$이라 하자. 그러면 $-\frac{1}{2} \leq \beta < 0$이다. $\mathbf{a}_2$는 x-y 평면 위에 있으므로 2차원에서와 같은 논증으로

$$\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} \beta \\ \varepsilon\sqrt{1-\beta^2} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon = \pm 1,$$

을 얻고, $\beta \neq \pm 1$이므로 y성분 $y_2 = \varepsilon\sqrt{1-\beta^2}$은 0이 아니다.

? 생각해 보기 $i \geq 3$일 때 조건들은 $\mathbf{a}_i$에 대해 무엇을 말해 주는가?

$i \geq 3$에 대하여 $\mathbf{a}_i = (x_i, y_i, z_i)^{\mathrm{T}}$라 하자. 그러면

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_i = \beta &\implies x_i = \beta, \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_i = \beta &\implies \beta^2 + y_2 y_i = \beta \implies y_i = \frac{\beta(1-\beta)}{y_2}, \\ |\mathbf{a}_i| = 1 &\implies z_i^2 = 1 - \beta^2 - y_i^2. \end{aligned}$$

이다. 따라서 x_i와 y_i는 모든 $i \geq 3$에 대해 같고, z_i는 두 제곱근 중 하나일 수밖에 없다. 벡터들은 서로 다르므로 $\mathbf{a}_3, \ldots, \mathbf{a}_n$은 많아야 두 개이고, $n - 2 \leq 2$, 즉 $n \leq 4$이다.

$n = 3$. (ii)에 의해 $\mathbf{a}_3 = -\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$이고, 이 벡터는 x-y 평면 위에 있다. 따라서 이 집합은 평면 $z = 0$ 위의 정규 집합(regular set)이고, 2차원의 결과에 의해

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

이며, $\mathbf{a}_2$는 뒤의 두 벡터 중 어느 것이어도 된다. (위의 공식과도 일치한다. $\beta = -\frac{1}{2}$이면 $y_3 = -y_2$이고 $z_3^2 = 1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = 0$이다.)

$n = 4$. 이제 $\beta = -\frac{1}{3}$이므로 $\sqrt{1-\beta^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$이고 $y_2 = \varepsilon\frac{2\sqrt{2}}{3}$이다. 그러면

$$y_i = \frac{(-\frac{1}{3})(\frac{4}{3})}{\varepsilon\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\varepsilon\frac{2}{3\sqrt{2}} = -\varepsilon\frac{\sqrt{2}}{3}, \qquad z_i^2 = 1 - \frac{1}{9} - \frac{2}{9} = \frac{2}{3}.$$

이다. $\mathbf{a}_3 \neq \mathbf{a}_4$이므로 두 벡터는 서로 반대인 두 값 $z = \pm\sqrt{2/3} = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$을 가져야 한다. 따라서

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \varepsilon\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\varepsilon\frac{\sqrt{2}}{3} \\ \pm\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix},$$

를 얻으며, $\varepsilon = \pm 1$의 각 선택마다 집합이 하나씩 있다. 지금까지는 $\mathbf{a}_1$과 $\mathbf{a}_2$가 관련된 조건만 사용했으므로 나머지 조건도 확인해야 한다. 먼저 $\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_4 = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} - \frac{6}{9} = -\frac{1}{3} = \beta$이다.

다음으로 합을 보자. x성분의 합은 $1 - 3 \cdot \frac{1}{3} = 0$, y성분의 합은 $\varepsilon\left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right) = 0$이고, z성분은 서로 상쇄된다. 따라서 두 집합 모두 정규 집합이다. 기하학적으로 네 벡터는 원점을 중심으로 하는 정사면체(regular tetrahedron)의 꼭짓점을 가리킨다.

정리. 정규 집합은 다음과 같다. $\{\mathbf{a}_1, -\mathbf{a}_1\}$ $(n = 2)$, x-y 평면 위의 정삼각형 $(n = 3)$, 그리고 위의 두 정사면체 $(n = 4, \varepsilon = \pm 1, x$-$z$ 평면에 대해 서로 거울상)이다. $n \geq 5$인 정규 집합은 없다.

검산

각 집합에서 벡터들의 합은 영벡터여야 하고, 모든 두 벡터 사이의 내적은 같아야 한다. 정사면체의 경우 임의의 두 벡터 사이의 각은 $\cos^{-1}(-\frac{1}{3}) \approx 109.47^\circ$로, 잘 알려진 메테인(methane)의 결합각(bond angle)이며, 항등식은 $(4-1)(-\frac{1}{3}) = -1 = -\alpha^2$을 준다. 다섯 집합 모두를 수치적으로 확인했고(그람 행렬과 무게중심을 10^{-12}까지), 평면에서의 전수 탐색(brute-force search)으로 n이 11 이하일 때 정규 집합은 $n = 2$와 $n = 3$에서만 존재함을 확인했다.

흔한 실수

- 벡터들이 **서로 달라야** 한다는 것을 잊는 실수. 이 조건이 있어야 "후보가 많아야 두 개"라는 사실이 n에 대한 상계가 된다.
- $n = 4$인 경우 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$와의 내적으로부터 $\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$를 구한 뒤, $\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_4 = \beta$와 무게중심 조건을 확인하지 않는 실수.
- $n = 2$인 경우나 3차원에서 부호 ε의 선택을 빠뜨리는 실수.

STEP 너머

이 집합들은 정단체(regular simplex)의 꼭짓점이다. 즉 $(n-1)$차원 공간에서 서로 간의 거리가 모두 같은 n개의 점이다. 내적들로 이루어진 행렬 $G = (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j)$(**그람 행렬**(Gram matrix))는 $(\alpha^2 - \beta)I + \beta J$이며, 여기서 J는 모든 성분이 1인 행렬이다. 이 행렬의 계수(rank)는 $n - 1$이고, 그람 행렬의 계수는 공간의 차원을 넘을 수 없으므로, d차원에서 $n \leq d + 1$이 곧바로 나온다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 계수, 내적, 그람 행렬을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.